Math. 144 k. 12

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

H 16

Lehrbuch

der

niedern Analysis,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Universität, an der Königl. Bau-Akademie, und an der Königl. allgemeinen Kriegesschule zu Berlin; der Kaiserl. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Erster Theil,

Arithmetik und Algebra enthaltend.

Zweyte umgearbeitete, durch viele neue erläuternde Beyspiele verdeutlichte Ausgabe.

Berlin, 1828.

Bei T. H. Riemann,
Schloßfreiheit Nr. 9.

Versuch

eines

vollkommen consequenten

Systems der Mathematik,

vom

Professor Dr. Martin Ohm,

an der Königl. Universität, an der Königl. Bau-Akademie und an der Königl. allgemeinen Kriegesschule zu Berlin; der Kaiserl. Ruß. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrer andern gelehrten Gesellschaften
korrespond. Mitglied.

Erster Theil,

Arithmetik und Algebra enthaltend.

Zweyte umgearbeitete, durch viele neue erläuternde Beyspiele verdeutlichte Ausgabe.

Berlin, 1828.

Bei T. H. Riemann,
Schloßfreiheit Nr. 9.

BIBLIOTHECA
REGLA
MONACENSIS.

Vorrede.

Der Verf. hat bey der Herausgabe dieses, ohngefähr auf 8–9 Theile berechneten Werkes keine andere Absicht, als für die gesammte Mathematik das zu geben, wodurch Euklid's Elemente für das Studium der Geometrie so wichtig geworden sind. In Erwägung aber, daß hinsichtlich des Umfanges, die Elemente der Geometrie zur gesammten Mathematik, und allein schon zum Kalkul, sich verhalten — wie ein Wassertropfen zum großen Weltmeere, scheint das Unternehmen die Kräfte des Einzelnen weit zu übersteigen, und der Verf. hat daher diese Leistung mit Vorbedacht einen Versuch genannt. Wie wichtig, ja wie nothwendig die hier beabsichtigte Arbeit aber ist, hat sich seit dem vor 6 Jahren erfolgten ersten Erscheinen des 1ten und 2ten Theils derselben, wiederum bedeutend entschiedener herausgehoben, so daß das Streben selbst jetzt keiner Entschuldigung mehr bedarf. Wohl aber muß sich der Verf. wegen der, in dieser neuen Ausgabe getroffenen Aenderungen rechtfertigen und demnach folgendes bevorworten.

*

Der Verf. hat seitdem seine Ansichten über den Kalkul, über die Mathematik überhaupt und über ihre Anwendung, durch alles ihm vorgekommene durchaus nur immer auf's neue bestätigt gefunden, also nicht im Geringsten geändert; er hat aber dieses Lehrbuch seinen analytischen Vorlesungen zu Grunde gelegt, und durch das Besprechen mit den schwächsten, wie mit den gediegensten Köpfen unter seinen zahlreichen Zuhörern, Gelegenheit genug gehabt, wahrzunehmen, wo jeden der Schuh drückt. Da nun die Aufmerksamkeit, welche auch außer dem Bereiche seiner Vorträge den Lehrbüchern des Verf. und den darin aufgestellten neuen, weniger materiellen Ansichten, so wie dem dadurch bedingten einfachern und konsequentern Gange geschenkt wird, es ihm zur doppelten Pflicht macht, seinerseits nichts zu vernachlässigen, was ihre Brauchbarkeit vermehren und sichern kann, so hat diese neue Ausgabe doch eine gänzliche Umarbeitung erlitten. Es ist namentlich gesucht worden, die elementarern Lehren mehr abzukürzen, bloß den Geist derselben hervorzuheben und hinsichtlich der Details auf den 1ten Band der „reinen Elementar-Mathematik des Verf., Berlin 1825," zu verweisen, dagegen die feinern, und für die sogenannte höhere Analysis wichtigern Untersuchungen mehr durch Beyspiele zu erläutern, dem trockenen Styl mehr Anschaulichkeit, Lebendigkeit und Anmuth zu geben (so viel solches nämlich anzugehen schien, ohne das Wichtigste, d. h. die strengste Konsequenz aufopfern zu müssen), endlich eine bequeme geistige Uebersicht des Ganzen zu erleichtern, damit sich der Leser an jeder Stelle, der durchaus vorhandenen wissenschaftli-

chen Einheit auch bewußt werden möge. Dieser letztern Absicht wegen ist theils ein genaues übersichtliches Inhalts-Verzeichniß, theils den einzelnen Kapiteln eine Vorerinnerung beygegeben, welche die Grund-Idee immer auf's neue vor die Augen rücken soll.

Diese Grund-Idee hat aber der Verf. aus dem Studium der Geschichte der Mathematik und vorzüglich des (übrigens kaum einige Jahrhunderte alten) Kalkuls abstrahirt, und sie ist dem Wesen nach folgende:

Die (unbenannte, ganze) Zahl ist der höhere Begriff; die benannte Zahl (die Quantität) der niedrigere. Die Lehre der (unbenannten, ganzen) Zahlen umfaßt daher das ganze Gebiet der Mathematik; die Lehre der Quantitäten ist nur eine einfache Anwendung der erstern. — In den verschiedensten Erscheinungen des Kalkuls (der Arithmetik, Algebra, Analysis ꝛc. ꝛc.) erblickt der Verf. nicht Eigenschaften der Größen, sondern Eigenschaften der Operationen, welche letztere aus der Betrachtung der Zahl mit Nothwendigkeit hervorgehen, und welche Gegensätze und Beziehungen äußern, die in dem ganzen physischen und psychischen Haushalte der Natur allenthalben sich wieder nachweisen lassen. *) — Die

*) Dadurch ist aber die Wichtigkeit der Anwendung der Mathematik zur Erforschung höherer Naturwahrheiten bedingt, in so ferne jedem mathematischen Physiker die Wahrheit der Behauptung einleuchtet, daß die sogenannten besondern Qualitäten nichts anders sind, als Erscheinungen, welche aus quantitativen Verbindungen einiger wenigen höhern Qualitäten hervorgehen, während von letztern vielleicht im Laufe der Jahrtausende wiederum dasselbe gesagt werden kann, so daß zuletzt bloß eine im Dualismus zerspaltene Urqualität übrig bleiben dürfte, deren Wesen der Mensch

Analysis hat es, diesem nach, nicht mit den Größen zu thun, sondern hat nur die (allgemeinern) Gesetze der Operationen zu fixiren und in den entferntesten Modifikationen zu verfolgen. — Die sogenannten negativen, gebrochenen, imaginären, — sind nicht Größen, sondern spezielle Erscheinungen allgemeiner, aus einer nothwendigen Abstraktion der Operationen von dem womit operirt wird, hervorgehender Zahlenbegriffe (allgemeiner Formen oder Zusammensetzungen.) — Gleichungen zwischen imaginären, gebrochenen, negativen — sind nicht Gleichungen zwischen Größen, deuten also nicht Einerleiheit der Quantität an, sondern sind bloß spezielle Modifikationen der Gegensätze, in denen die Operationen zu einander stehen, und deuten bloß Identität der Operationen an. — Entgegengesetzte Größen gibt es nicht, sondern derjenige Gegensatz, welcher einseitig aufgefaßt, zu dem Glauben an entgegengesetzte Größen geführt hat, entspricht dem

---

nimmer ergründen wird, während er alle uns bis jetzt noch als Qualitäten erscheinenden quantitativen Zusammensetzungen aus ihr, auf mathematisch-analytischem Wege vielleicht nachzuweisen gelernt haben dürfte. — Und wenn bis jetzt von dem hier angedeuteten wenig mehr als der Anfang gemacht ist (von Newton, La Place, Fourier, Poisson, ꝛc. ꝛc.) so zeigt doch der erste in Deutschland gemachte Versuch der Art (in der „mathematisch bearbeiteten galvanischen Kette des Dr. G. S. Ohm, Berlin 1827.“), wie selbst Naturkräfte, welche sich bis jetzt festen Gesetzen am meisten entzogen hatten, endlich doch der Kraft der mathematisch-analytischen Dynamik weichen müssen, und wie die dahin gehörigen, verschiedenartigsten Erscheinungen nichts anders sind, als nothwendige quantitative Folgerungen aus einigen wenigen Eigenthümlichkeiten dieser Kräfte, die man bis jetzt noch als eigene Qualitäten ansehen muß, bis solche (oder die Kräfte selber) im Laufe der Zeiten endlich wieder ihre Auflösung finden werden. (Vgl. Proteus 2tes Heft 1828. und Schweiggers Jahrbücher der Chemie und Physik 1828. II.).

Gegensatze zwischen dem Addiren und Subtrahiren. Andere Gegensätze (der physischen und psychischen Welt) entsprechen dem der Multiplikation und Division; und noch andere dem dreyfachen Gegensatz, der zwischen dem Potenziren, Radiziren und Logarithmiren wahrgenommen wird. *)

Sonach kommen nirgends im Kalkul (Arithmetik, Algebra, Analysis ꝛc. ꝛc.) Größen vor; aber die ganze Analysis kann unmittelbar zur Vergleichung der Größen angewandt werden. — In den Größen selbst unterscheidet man Qualität und Quantität; aber erstere wird wieder durch letztere bestimmt. In so ferne die Größen Quantität haben, sind sie benannte Zahlen, die wiederum erkannt werden, bey einerley Benennung, an der unbenannten Zahl, welche letztere in ihren Operationen durch den ganzen Kalkul hindurch verfolgt worden ist.

So geht Lehre und Anwendung Hand in Hand, jede aber bestimmt und sorgfältig von der andern geschieden; so vereinfacht sich die Lehre wie die Anwendung unglaublich, und beyde werden dadurch dem unbefangenen redlichen Forscher unendlich leichter zum Eigenthum.

In Bezug auf Methode befolgt der Verf. ganz den einfachen und unverdorbenen Gang der Alten. Er findet auf dem analytischen (zergliedernden) Weye; er hält

---

*) Wie klar namentlich eine Koordinatentheorie wird, wenn man den Gegensatz zwischen rechts nnd links, zwischen oben und unten, nicht auf die Größen sondern auf die Operationen wirft, glaubt der Verf. in seiner „analytischen Geometrie in ihren Elementen Berlin 1827." zur Genüge nachgewiesen zu haben.

das so gefundene nicht eher für wahr, als bis er auf dem Wege der Synthesis sich von der Nothwendigkeit des Gefundenen auf das sorgfältigste überzeugt hat. In seinen mündlichen Vorträgen kann der analytische Gang jedesmal gehörig durchgeführt werden; in den Lehrbüchern dagegen, um allzugroße Weitläufigkeit zu vermeiden, nur angedeutet seyn, mit wenigen, kräftigen Zügen. Dem oberflächlichen Leser kann deshalb das synthetische Ansehen dieser Lehrbücher des Kalkuls (der vorzugsweise, wenn auch unpassend, Analysis genannt wird) unangenehm auffallen; bey dem tiefer gehenden, auch zwischen den Zeilen lesenden, kann dies nicht der Fall seyn.

Daß man nach diesen Ansichten den Kalkul mit ungemeinem Erfolg an Gymnasien, und zwar in Untermittel-Klassen bereits, lehren könne, besonders auch zur Förderung formeller Bildung, hat der Verfasser früher zur Genüge bewiesen, und es findet dieser Erfolg in dem Umstande seinen Grund, daß diese Ansicht des Kalkuls dieselbe Konsequenz im Schließen, dieselbe Selbstthätigkeit im Folgern in Anspruch nimmt, als dies die Euklid'sche Geometrie thut, nur noch in höherem Grade. Der Lehrer muß jedoch auch pädagogische Rücksichten nehmen, und in dieser Beziehung muß der Verf. denjenigen Lehrern, welche sich seiner Lehrbücher bedienen wollen, rathen, die als Einleitung in seine Elementar-Mathematik geschriebene „Anweisung ꝛc. ꝛc. Berlin 1827," vorher recht sorgfältig zu studiren, so wie überhaupt das ganze System sich recht tüchtig anzueignen, und anfänglich den 1sten Theil der reinen Elementar-Mathematik zu

Grunde zu legen, während der 2te und 3te Theil desselben Elementar-Werkes, den geometrischen und trigonometrischen Vortrag, wie er sich an diesen arithmetischen anschließt, und wie er von dem Verf. für Schulen passend gefunden wird, enthalten.

Binnen 18 Wochen wird der Druck des zweyten Theiles des gegenwärtigen Werkes in der neuen Ausgabe beendet seyn, so daß bis zu Ostern 1829, der (zum erstenmale erscheinende) dritte Theil „die Elemente der Differential- und Integralrechnung enthaltend" die Presse verlassen haben wird. Die beyden ersten Theile bekommen auch noch den besondern Titel:

„Lehrbuch der niedern Analysis"

während der dritte, vierte und fünfte Theil den besondern Titel

Lehrbuch der höhern Analysis

führen werden. Der 4te und 5te Theil werden das feinere der Differential- und Integral-Rechnung, besonders aber die Reihen behandeln. Wann aber diese spätern Theile erscheinen werden, kann der Verf. nicht mit Gewißheit bestimmen, weil er die Zeit zu seinen wissenschaftlichen Arbeiten bloß durch Verzichtleistung auf jeden geselligen Umgang sich erringen kann, und doch in diesen Theilen gerne etwas ordentliches leisten möchte, von welchem das in den

Aufsätzen aus dem Gebiete der höhern Mathematik, Berlin 1823

und in den

Kommentarien der K. Ruß. Akademie zu St. Petersburg

bis jetzt gegebene, nur Andeutungen seyn sollten.

Schlüßlich möchte der Verf. wünschen, daß seine Arbeiten ruhig in der Stille fortwürken und ihrem Ziele immer näher rücken möchten, welches kein anderes ist, als durch einfache Nüchternheit, Klarheit und Bestimmtheit, dem zu groben Materialismus auf der einen Seite, so wie den schrankenlosen und einseitigen Spekulationen der Metaphysiker auf der andern Seite, im Laufe der kommenden Zeiten gehörige Schranken gesetzt zu sehen.

Druck und Papier beurkunden auf's neue das rühmliche Streben des jetzigen Herrn Verlegers.

Berlin, den 27sten Juny 1828.

Dr. M. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß des ersten Theils.

Allgemeine Einleitung. . . Pag. 1 — 4.

Eintheilung der Mathematik in

α) die Lehre der unbenannten Zahlen (Zahlenlehre, Arithmetik, Analysis);

β) die Lehre der benannten Zahlen (allgemeine Größenlehre) und der Dinge, welche noch nicht benannte Zahlen sind, es aber werden können (besondere Größenlehre).

Zahlenlehre (Arithmetik, Analysis).

Einleitung. . . . . — 7—10.

§.§. 1. 2. Zahl.

§.§. 3—5. Zahlen-Verbindungen.

§.§. 6. 7. Zahlzeichen (Zahlen-Ausdruck oder Ausdruck schlechthin).

§. 8. Gleichung.

§. 9. Wenn zwey Ausdrücke einem dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.

Erstes Kapitel.

Von den Zahlen-Verbindungen der ersten Art. Von der Null und von den additiven und subtraktiven Ausdrücken. Von den algebraischen Summen. (§.§. 10—43.) . — 11—54.

1te Abtheilung. Einfachste Gesetze der Zahlen-Verbindungen der ersten Art. (§.§. 10—19.) — 11—24.

§. 10. Begriffe der Summe a+b, der Differenz a—b.

§. 11. 1) a+b und a—b sind allemal nur eindeutig, 2) müssen in Klammern eingeschlossen werden; 3) a+b = b+a; 4) Gleiches zu oder von Gleichem addirt oder subtrahirt, gibt Gleiches.

§. 12. I. (a—b)+b = a; II. (a+b)—b = a; III. a—(a—b) = b.

§. 13. Zehn Lehrsätze, welche lehren, wie man Summen und Differenzen und einfache Zahlen zu einander addirt und von einander subtrahirt.

§. 14. Alle Sätze dieses Kapitels folgern aus [§. 11. Nr. Nr. 3. und 4. §. 12. und §. 13. 1. (daß nämlich (a+b)+c = (a+c)+b)], in Verbindung mit (§. 9.); so daß man durch diese Sätze allein alles hieher gehörige bis in's Unendliche fort entwickeln kann.

§. 15. Nur muß die Einschränkung statt finden, daß alle vorkommenden Subtraktionen möglich sind.

§. 16—18. Aus x—a = b, a—x = b und a+x = x+a = b jedesmal den unter x vorgestellten Ausdruck zu finden.

§. 19. Wann sind die einzelnen Verwandlungen möglich, also anwendbar?

2te Abtheilung. Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Gesetze der Zahlen-Verbindungen der ersten Art. (§. §. 20—43.) Pag. 24—47.

§. 20. Summen mehrer Summanden.

§. §. 21. 22. Regel, Klammern wegzulassen, wenn mehre Ausdrücke theils durch Addition, theils durch Subtraktion mit einander verbunden sind.

§. §. 23—25. Glieder beliebig verwechseln.

§. 26. Ein solcher Ausdruck, nach (§. 21.) ohne Klammern geschrieben, ist immer = A—B.

§. 27. Zwey solche Ausdrücke werden addirt und subtrahirt.

§. 28. Jeder hier vorkommende Ausdruck läßt sich in einen nach (§. 21.) ohne Klammern geschriebenen verwandeln.

§. 29. Das (§. 14.) beschriebene Entwickeln hieher gehöriger Sätze kann statt finden, ohne daß man sich mehr um die Bedeutung der Buchstaben bekümmert.

§. 30. Die Summe a+b und die Differenz a—b

sind dann bloße Rechnungsformen; und die Gleichungen lehren jetzt bloß das Verhalten der beyden Operationen zu einander kennen.

§. 31. Nun erst sind die Auflösungen der Aufgaben (§. §. 16—18.) allgemein möglich.

§. 32— §. 36. Die Differenz p—p wird durch 0 (Null) bezeichnet, die Summe 0+b, durch +b, die Differenz 0—b durch —b. — Die so definirte 0, und die additiven und subtraktiven Ausdrücke +b und —b werden wie die Differenzen oder Summen, welche sie repräsentiren, nach (§. 13.) addirt und subtrahirt.

§. 37. §. 38. Jeder nach (§. 21.) ohne Klammern geschriebene Ausdruck, ist als eine gewöhnliche Summe mehrer Summanden anzusehen, in welcher aber die Summanden lauter Ausdrücke von der Form +b oder —b sind. Algebraische Summe.

§. 39. Jeder Ausdruck, der hier entstehen kann, und ursprünglich aus wirklichen Zahlen entstanden ist, ist entweder eine ganze Zahl z, oder Null, oder von der Form —z.

§. 40. Positive, negative (ganze) Zahl, nebst der Null; sind enthalten in der Differenz $\alpha-\beta$ zweyer wirklichen (ganzen) Zahlen.

§. 41. In einer Gleichung zwischen zwey algebraischen Summen kann man die Glieder beliebig von der einen Seite weg und (mit dem entgegengesetzten Zeichen) auf die andere Seite bringen.

§. 42. Arithmetische Proportionen.

§. 43. Allgemeine hieher gehörige (algebraische) Aufgabe.

Anhang.

Erste Anwendung der (hier entwickelten) Lehren der Zahlenlehre auf die allgemeine Größenlehre (Lehre der benannten Zahlen) (1—8.). Pag. 48—54.

1) 2) Begriffe der Größe (des Quanti); der Größe (Quantitatis); des Maaßes, des Gemäßes oder der Einheit; der allgemeinen Größenlehre.

3) Addiren und Subtrahiren der Größen definirt.

4) Lehrsätze, das Addiren und Subtrahiren der (ganzen) benannten Zahlen betreffend.

5) 6) Negative benannte Zahl. Die 0 (Null) als benannte Zahl gedacht.
7) Positive und negative benannte Zahlen sind mit Vorsicht zu behandeln; daher ist es besser sie gar nicht zuzulassen.
8) Allgemeine hiehergehörige (algebraische) Aufgabe.

Zweytes Kapitel.

Von den Zahlen-Verbindungen der zweyten Art Von den gebrochenen Zahlen. Von den geometrischen Zahlen-Proportionen. (§. 44—§. 79.). . . . . Pag. 55—93.

Erste Abtheilung. Einfachste Gesetze der Zahlen-Verbindungen der zweyten Art. (§. 44—§. 53.). . . . . — 55—65.

Diese Abtheilung ist, nächst den Begriffen des Produkts und des Quotienten, eine genaue und wörtliche Abschrift der ersten Abtheilung des ersten Kapitels, mit der Abänderung, daß wo dort vom Addiren und Subtrahiren die Rede ist, hier die Worte Multipliziren und Dividiren gesetzt sind.

Zweyte Abtheilung. Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Gesetze der Zahlen-Verbindungen der zweyten Art. (§. 54—§. 79.). . . . . — 65—83.

Ist ebenfalls eine bloße und wörtliche Wiederholung der zweyten Abtheilung des ersten Kapitels, welche statt der negativen Zahlen, die gebrochenen, und statt der arithmetischen Proportionen, die geometrischen in sich schließt; wenn man nur die oben angedeutete Abänderung trifft.

Anhang.

Zweyte Anwendung der (hier entwickelten) Lehren der Zahlenlehre auf die allgemeine Größenlehre (Lehre der benannten Zahlen). (9—21.). — 83—93.

9) 10) $b \cdot (aE) = (ba)E$; $\frac{aE}{b} = \frac{a}{b}E$; wenn

nur a und b und $\frac{a}{b}$ wirkliche (ganze) Zahlen sind.

11) Erklärung der gebrochenen benannten Zahl. Die gebrochene unbenannte Zahl des Kapitels ist eine bloße Rechnungsform; die gebrochene benannte Zahl ein Theil der Einheit.

12) 13) und 14) Die Sätze (9. und 10.) gelten noch, wenn a und b beliebige ganze oder gebrochene Zahlen sind.

15) Das Reduziren der benannten Zahlen auf andere mit andern (höhern oder niedrigern) Einheiten.

16) Erklärung der Verhältnißzahlen a und b, zweyer Größen A und B.

17) Folgerungen daraus.

18) Erklärung einer (geometrischen) Größen-Proportion.

19) Sie läßt sich immer auf eine Zahlen-Proportion zurückführen.

20) und 21) Sätze, welche alle Arten der umgekehrten und direkten Regula de tri, de quinque, de septem u. s. w. und die Kettenregel in sich schließen.

Drittes Kapitel.

Gesetze der Mischung der Zahlen-Verbindungen der zweyten mit denen der ersten Art. Von den reelen Zahlen. Von den größern und kleinern reelen Zahlen. (§. 80— §. 118.) Pag. 94—136.

Erste Abtheilung. Einfachste Gesetze dieser Mischung. (§. 80—84.) . . Pag. 95—104.

§. 80. Regel über das Weglassen der Klammern.

§. 81. Lehrsätze welche lehren, wie man einfache Ausdrücke und Summen und Differenzen multiplizirt und dividirt; und wie Produkte und Quotienten und einfache Zahlen zu einander addirt und von einander subtrahirt werden.

§. 82. Alle Sätze dieser 3 Kapitel folgern aus den Formeln $a+b=b+a$, $(a+b)+c=(a+c)+b$, $ab=ba$, $(ab)c=(ac)b$, $(a+b)c=ac+bc$, in Verbindung mit (§. 9.) und mit den Sätzen (§. 11. Nr. 4 und §. 45. Nr. 4.): daß Gleiches mit Gleichem verbunden Gleiches wiedergibt; so daß man durch diese Sätze allein alles hieher gehörige bis in's Unendliche fort entwickeln kann.

§. 83. und §. 84. $\frac{A}{B}=x+\frac{A-Bx}{B}$ und Anwen-

dung dieses Satzes, um einen Quotienten in eine Summe zu verwandeln.

Zweyte Abtheilung. Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Gesetze dieser gemischten Zahlen-Verbindungen (§. 85—118.). Pag. 105—132.

§. 85. Erklärung des ganzen Produkts.
§. §. 86. 87. Welche Sätze gelten noch für ganze Produkte?
§. 88. Erklärung des Differenz Produkts.
§. 89. Es ist nur eindeutig, daher noch Gleiches mit Gleichem multiplizirt, Gleiches geben muß.
§. 90. 91. Welche Sätze gelten noch für Differenz-Produkte?
§. 92. Alle nach (§. 82.) nöthigen Sätze der Produkte gelten noch für Differenz Produkte.
§. 93. Erklärung des Differenz Quotienten.
§. 94. Noch immer ist $(a:b)\cdot b = a$, $(a\cdot b):b = a$, $a:(a:b) = b$.
§. 95. Der Differenz-Quotient, wenn man nie durch 0 dividirt, ist nur eindeutig; daher dann
§. 97. auch noch immer Gleiches durch Gleiches dividirt, Gleiches wieder geben muß.
§. 96. Nie kann und darf ein Divisor Null seyn.
§. 98. §. 99. Das (§. 82.) beschriebene Ableiten der Gleichungen und Sätze findet ganz allgemein statt, ohne sich mehr um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben bekümmern zu dürfen. Die Gleichungen lehren dann das Verhalten der 4 Operationen zu einander.
§. 100. Die 0 (Null), die 1 (Eins) und die additiven und subtraktiven Ausdrücke $+b$ uud $-b$, werden multiplizirt und dividirt, wie eben Summen und Differenzen nach (§. 81.) behandelt werden müssen.
§. 101. Wörtliche Regeln darüber.
§. 102. Die Algebraische Summe wird mit einem Ausdruck m multiplizirt nnd dividirt; gemeinschaftliche Faktoren und Divisoren herausseßen.
§. 103. Praktische Anwendbarkeit dieser Sätze.
§. 104. Brüche unter einerlei Benennung zu bringen.
§. 105. Solche dann zu addiren und zu subtrahiren.
§. 106. General-Nenner im Allgemeinen.

§. 107. Zwey algebraische Summen werden mit einander multiplizirt.
§. 108. Dieselben werden durch einander dividirt.
§. 109. Jede bis jetzt mögliche spezielle Zahlform ist in $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$ enthalten, wo α, β, γ, δ beliebige wirkliche (ganze) Zahlen bedeuten.
§. 110. Jede bis jetzt mögliche spezielle Zahlform ist daher entweder $+\frac{\alpha}{\beta}$, oder 0, oder $-\frac{\alpha}{\beta}$, wo $\frac{\alpha}{\beta}$ eine ganze oder auch eine gebrochene Zahl ist.
§. 111. Reele Zahlen sind in diesen 5 Formen: 1) positive ganze, 2) negative ganze, 3) positive gebrochene, 4) negative gebrochene Zahl, endlich 5) die 0 (Null), enthalten.
§. 112. Es wird a>b genannt, wenn a—b positiv ist, a und b aber reele Zahlen sind.
§. 113—116. Sätze des Größern und Kleinern.
§. 117. Allgemeine hieher gehörige (algebraische) Aufgabe.
§. 118. Der Fall wo $x = \frac{\alpha}{0}$ oder $= \frac{0}{0}$ wird, näher untersucht.

Anhang.

Dritte Anwendung der (hier entwickelten) Lehren der Zahlenlehre auf die allgemeine Größenlehre. (22—26.) Pag. 133—136.
22) Das Addiren und Subtrahiren der benannten ganzen oder gebrochenen Zahlen.
23) Erklärung der gleichen, der größern und der kleinern Größen (quantorum).
24) Erklärung der zusammengesetzten benannten Zahl.
25) Verwandlung zusammengesetzter benannter Zahlen in einfache, und umgekehrt.
26) Lehrsatz, welcher die Gesellschafts- und Theilungsrechnung in sich schließt.

Viertes Kapitel.

Anwendung der bisher aufgestellten allgemeinen Gesetze der Zahlen-Verbindungen der ersten und der zweyten Art, zur Auffindung

besonderer Eigenschaften der Zahlen selbst.
(§. 129— §. 132.). . . . Pag. 137—150.
§. 119. Erklärung des Vielfachen und des Theilers.
§. 120. 121. Folgerungen.
§. 122. Erklärung der geraden und der ungeraden Zahl.
§. 123. Folgerungen.
§. 124. Erkärung des nächstkleinsten Quotienten und des Restes.
§. 125. Folgerungen.
§. 126. Erklärung des gemeinschaftlichen Vielfachen; des gemeinschaftlichen Theilers, der Primzahlen und der zusammengesetzten.
§. 127. Folgerungen.
§. 128. Erklärung der einfachen Faktoren einer Zahl.
§. 129. Folgerungen.
§. 130. Noch Folgerungen, die zyklischen Perioden enthaltend.
§. 131. Wann ist ein Bruch in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt?
§. 132. Folgerungen.

Fünftes Kapitel.

Von den Zahlen-Verbindungen der dritten Art
(§. §. 133—147.). . . . Pag. 151—165.
Erste Abtheilung. Einfachste Gesetze der Zahlen-Verbindungen der dritten Art. (§. 133—§. 145.). . . Pag. 151—163.
§. 133. Erklärungen der Potenz a^b, der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ und des Logarithmen a?b.
§. 134. 1) Sie sind allemal eindeutig; 2) sie müssen in Klammern eingeschlossen werden; 3) es ist nicht $a^b = b^a$, 4) Gleiches mit Gleichem potenzirt, radizirt oder logarithmirt, gibt Gleiches.
§. 135. I) $(\sqrt[b]{a})^b = a$; II) $\sqrt[b]{(a^b)} = a$; 1) $b^{a?b} = a$; 2) $b^a ?b = a$; III) $\sqrt[a?b]{a} = b$; 3) $a?\sqrt[b]{a} = b$.
§. 136. Lehrsätze, welche lehren, wie man eine Potenz, eine Wurzel und einen Logarithmen und eine einfache Zahl, potenzirt, radizirt und logarithmirt.

§. 137. Diese Lehrsätze und die hiehergehörigen Gleichungen ergeben sich alle aus $(a^b)^c = (a^c)^b$ (§. 136. Nr. 1.), in Verbindung mit (§. 134. Nr. 4.) und mit (§. 9.), so wie (§. 135.).

§. 138. Wann ist die Anwendung dieser Sätze möglich? —

§. 139—144. Aus $x^b = a$, $b^x = a$, $\sqrt[x]{b} = a$, $b ? x = a$, $\sqrt[b]{x} = a$ und $x ? b = a$, jedesmal den durch x bezeichneten Ausdruck zu finden.

§. 145. Diese Aufgaben sind jedoch nicht alle zu jeder Zeit möglich.

Zweyte Abtheilung. Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Gesetze der Zahlen-Verbindungen der dritten Art. (§. 146— §. 147.) . . . . Pag. 164—165.

§. 146. Wenn a nach und nach mit b, c, d, ꝛc. theils potenzirt, theils radizirt wird, so ist es einerley, in welcher Ordnung dies geschieht.

§. 147. Wenn man die 4 erstern Operationen nicht mit in Verbindung bringt, so kann man (§. 137.) ganz allgemein anwenden, ohne sich mehr um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben bekümmern zu dürfen.

Sechstes Kapitel.

Gesetze der Mischung der Zahlen-Verbindungen der dritten Art, mit denen der beyden ersten Arten. (§. 148— §. 179.) . Pag. 166—204.

Erste Abtheilung. Einfachste Gesetze dieser Mischung. (§. 148— §. 151.) . Pag. 167—181.

§. 148. Regel die Klammern zu ersparen.

§. 149. Lehrsätze, welche lehren, wie man Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten und die einfache Zahl, potenzirt, radizirt und logarithmirt; desgleichen wie Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und die einfache Zahl durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit einander verbunden werden.

§. 150. Alle möglichen Sätze und Gleichungen ergeben sich, α) aus den Formeln, welche das Grundwesen der Addition, der Multiplikation, des Potenzirens, dann das Grundwesen der Mischungen dieser Operationen

ausmachen, nämlich $a+b = b+a$, $(a+b)+c = (a+c)+b$, $ab = ba$, $(ab)c = (ac)b$, $(a^b)^c = (a^c)^b$, $(a+b)c = ac+bc$, $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$, $a^{bc} = (a^b)^c$, $(ab)^c = a^c \cdot b^c$. β) in Verbindung mit (§. 11. Nr. 4. §. 45. Nr. 4. §. 134. Nr. 4.), und γ) in Verbindung mit (§. 9.).

§. 151. Wann sind diese Formeln und Gleichungen anwendbar?

Zweyte Abtheilung. Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Gesetze dieser Mischung. (§. 152— §. 179.) . Pag. 181—204.

§. 152. Begriff der ganzen Potenz.

§. 153. Die Sätze der wirklichen Potenzen gelten auch für diese.

§. 154. $1^b = 1$, $0^b = 0$, $a^{b+1} = a^b \cdot a$, $(-a)^b = \pm a^b$, $(-1)^b = \pm 1$ und $p^c \gtreqless 1$, wenn $p \gtreqless 1$ und positiv, und c eine positive ganze Zahl ist.

§. 155. Begriff der Differenz-Potenz.

§. 156. Sie ist nur eindeutig.

§. 157. $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{-\beta} = \frac{1}{a^\beta}$.

§. 158. Die Sätze der Potenzen gelten auch für diese.

§. 159. Es ist $a^c \gtreqless b^c$, wenn a und b absolut, $a > b$, und je nachdem c positiv, 0, oder negativ (ganz) ist.

§. 160. Begriff der absoluten Wurzel.

§. 161. Sie ist allemal eindeutig.

§. 162. Es gibt immer $\frac{w}{n}$ und $\frac{w+1}{n}$, so daß $\sqrt[b]{a} > \frac{w}{n}$ und $< \frac{w+1}{n}$ ist.

§. 163. Begriff der irrationalen Zahl.

§. 164 Die absolute Wurzel hat auch allemal wirklich eine (rationale oder irrationale) Bedeutung.

§. 165. $(\sqrt[b]{a})^b = a$, $\sqrt[b]{(a^b)} = a$, $\sqrt[b]{1} = 1$, $\sqrt[b]{0} = 0$.

§. 166. Es ist $\sqrt[c]{a} > \sqrt[c]{b}$, wenn $a > b$ und beyde a und

b absolut sind; demnach auch $\sqrt[c]{p} \gtreqless 1$, je nachdem

$p \gtreqless 1$ und absolut ist.

§. 167. Die Sätze der ganzen Wurzeln gelten noch für diese absoluten Wurzeln.

§. 168. Erklärung der reelen Potenz.

§. 169. Sie ist allemal eindeutig.

§. 170. Die Sätze der ganzen Potenzen gelten noch für sie.

§. 171. $1^c = 1$, $0^c = 0, = 1, = \frac{1}{0}$, und $a^c \gtreqless b^c$,

je nachdem c positiv, 0 oder negativ ist, wenn nur

$a > b$ und beyde absolut sind. Und $p^c \gtreqless p^d$, wenn

$c > d$ beliebig reele Zahlen sind und je nachdem die

absolute Zahl $p \gtreqless 1$ ist.

§. 172. Begriff des reelen Logarithmen.

§. 173. Er ist immer nur eindeutig.

§. 174. Es gibt immer $\frac{w}{n}$ und $\frac{w+1}{n}$ so, daß $b^{\frac{w}{n}} < a$

und $b^{\frac{w+1}{n}} > a$ ist, oder daß $a ? b > \frac{w}{n}$, aber $< \frac{w}{n+1}$

ist.

§. 175. Der reele Logarithme hat daher auch wirklich jedesmal eine (rationale oder irrationale) Bedeutung.

§. 176. Nur wird jedesmal vorausgesetzt, daß die Basis

b nicht gerade 1, also $b \gtrless 1$, jedoch positiv ist.

§. 177. Auch ist noch $b^{a?b} = a$, $b^a ? b = a$, $\sqrt[a?b]{a} = b$,

$a ? \sqrt[b]{a} = b$, $b ? b = 1$, und $1 ? b = 0$.

§. 178. Die Sätze der ganzen Logarithmen gelten noch für diese reelen Logarithmen.

§. 179. Einige praktische Erweiterungen auf algebraische Summen und auf algebraische Produkte.

Siebentes Kapitel.

Anwendung der bisher entwickelten allgemeinen Gesetze der Zahlen-Verbindungen zur

Auffindung der Gesetze des (gemeinen) Zifferrechnens. (§. 180— §. 210.) . Pag. 205—225.

Erste Abtheilung. Zahlensystem. Das Operiren mit numerischen Zahlen (§. 180—§. 193.). Pag. 206—214.

§. 180. Jede ganze Zahl N läßt sich auf die Form $\mu \cdot z^m + \cdots + \delta z^3 + \gamma z^2 + \beta z + \alpha$ bringen, wo α, β, γ, &c. 0 oder andere, der Zahl z vorangehende Ziffern sind.

§. 181. Zahlensysteme. Numerische Zahl.

§. 182. Bequemeres Schreiben derselben. Ziffern der höhern Ordnungen.

§. 183. Einheiten der höhern Ordnungen.

§. 184— §. 193. Das Addiren, Subtrahiren, Multipliziren, Dividiren, Potenziren, Radiziren und Logarithmiren zweyer numerischen Zahlen.

Zweyte Abtheilung. Von den systematischen Brüchen. (§. 194— §. 201.). . Pag. 215—220.

§. 194. Erklärung des systematischen Bruches.

§. 195. Ganze Stellen. Gebrochene Stellen.

§. 196. 1) Er kann als eine Summe angesehen werden;
2) man kann rechts Nullen hinzufügen und weglassen;
3) solche unter einerley Benennung zu bringen.

§. 197. Systematische Brüche zu addiren, subtrahiren, multipliziren und dividiren.

§. 198. Zu radiziren.

§. 199. Zu logarithmiren.

§. 200. Wenn ganze Zahlen darunter vorkommen.

§. 201. Einen gewöhnlichen Bruch in einen systematischen zu verwandeln.

Dritte Abtheilung. Von den systematischen Logarithmen. (§. 202— §. 207.) . Pag. 220—222.

§. 202. Logarithmen-System.

§. 203. Kennziffer, Mantissa.

§. 204. Ist α die Kennziffer eines systematischen Logarithmen, so hat der Logarithmand $\alpha+1$ ganze Stellen.

§. 205. Die systematischen Logarithmen aller aus denselben Ziffern bestehenden ganzen Zahlen oder systematischen Brüche, sind nur in ihrer Kennziffer verschieden.

§. 206. Die Kennziffer der Logarithmen wird zu groß genommen, damit nicht negative Logarithmen entstehen.

§. 207. Praktische Regel zur Auffuchung des, zu einem Logarithmen gehörigen Logarithmanden.

Vierte Abtheilung. Dekadisches=Zahlensystem. Dezimal=Brüche. Brigg'sche oder gemeine Logarithmen. (§. 208— §. 210.) . Pag. 223—25.

§. 208. Das vorhergehende gilt für jedes Zahlensystem also auch für das dekadische. Die systematischen Brüche und Logarithmen heißen jetzt Dezimalbrüche und Brigg'sche Logarithmen.

§. 209. Wozu die gewöhnlichen Logarithmentafeln benutzt werden.

§. 210. Wie man auch mittelst der gewöhnlichen Tafeln eine Zahl durch eine andere logarithmiren kann.

Achtes Kapitel.

Praktische Regeln der Ziffern= und der Buchstaben=Rechenkunst. . . Peg. 226—249.

Erste Abtheilung. Praktische Methoden, die numerische Bestimmung der Ausdrücke betreffend. Pag. 226—236.

Zweyte Abtheilung. Praktische Methoden, die Verwandlung allgemeiner Ausdrücke betreffend. Pag. 236—249.

Neuntes Kapitel.

Von den Bestimmungs=Gleichungen im Allgemeinen und von der Auflösung der einfachen algebraischen Gleichungen mit einem und mit mehrern Unbekannten. (§. 211—§. 232.) Pag. 250—273.

Erste Abtheilung. Allgemeine Begriffe. Pag. 250—253.

§. 211. Begriff der Bestimmungs=Gleichung und der identischen.

§. 212. Dem Wesen nach ist kein Unterschied zwischen beyden.

§. 213. Eintheilung der Bestimmungs=Gleichungen in algebraische und transcendente, jede wieder mit 1, 2, 3 oder mehr Unbekannten. Die algebraischen werden wieder, mit einem Unbekannten, in einfache, quadratische, kubische, biquadratische, überhaupt in Gleichungen vom mten Grade getheilt, während sie, wenn sie mehr Unbekannte enthalten, nach Ordnungen von einander gesondert, und die der ersten Ordnung zu den einfachen gezählt werden.

§. 214. Koeffizienten der Gleichung. Reine höhere Gleichungen.

§. 215. Begriff der Auflösung.

Zweyte Abtheilung. Auflösung der einfachen algebraischen Gleichungen mit einem und mit mehren Unbekannten. (§. 216— §. 232.) Pag. 253—273.

§. 216. Auflösung der Gleichung $ax+b=0$ oder $ax=b$.

§. 217. Diese Auflösung gilt allemal und einzig, wenn a nicht Null ist.

§. 218. Wenn in $x = -\frac{b}{a}$, der Renner a Null wird, so muß dieser Fall besonders betrachtet werden.

§. 219. Zwey einfache Gleichungen nach x und y aufzulösen.

§. 220. So lange nicht der Renner von x und von y Null wird, haben die Gleichungen allemal eine, aber auch nur eine einzige Auflösung.

§. 221. Bekommen aber die beyden Ausdrücke für x und für y in speziellen Fällen die Form $\frac{1}{0}$, so wiedersprechen sich die gegebenen Gleichungen; und erhalten die Ausdrücke x und y die Form $\frac{0}{0}$, so fallen beyde gegebenen Gleichungen in eine einzige zusammen.

§. 222. Allgemeineres Verfahren diese Gleichungen aufzulösen. Begriffe des Eliminirens und der Eliminations-Gleichung.

§. 223. Vier Eliminations-Methoden für einfache Gleichungen.

§. 224. Drey gegebene einfache Gleichungen nach x, y uud z aufzulösen.

§. 225. Sie haben allemal nur eine einzige Auflösung.

§. 226. Wenn die Ausdrücke für x, y, z die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so fallen die 3 Gleichungen in 2 oder nur in eine einzige zusammen. Nehmen x, y, z aber die Form $\frac{1}{0}$ an, so können die 3 gegebenen Gleichungen nie zugleich statt finden.

§. 227. Noch andere Auflösungs-Methoden der 3 (§. 224.) gegebenen Gleichungen.

§. 228. n Unbekannte zu finden aus n einfachen Gleichungen.

§. 229. Wenn weniger Gleichungen als Unbekannte gegeben sind.

§. 230. Anwendung auf den Fall, wo x, y, z, u ꝛc. die Form $\frac{0}{0}$ annehmen.

§. 231. Wenn mehr Gleichungen gegeben sind als Unbekannte.

§. 232. Aus n Gleichungen kann man zuerst andre n Gleichungen ableiten, welche die gegebenen ersetzen, aber öfters bequemer zu behandeln sind.

Zehntes Kapitel.

Von den Ausdrücken von der Form ax^2+bx+c. Von den Werthen von x, welche sie zu Null machen. Von der allgemeinen und imaginären Quadratwurzel. Von der Auflösung derjenigen Gleichungen mit mehren Unbekannten, welche zu quadratischen Gleichungen mit einem Unbekannten führen. (§. 233 — §. 261). . . . Pag. 274—307.

Erste Abtheilung. Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen und von den allgemeinen (sowohl reelen als imaginären) Quadratwurzeln. (§. 233 — §. 249.). Pag. 274—292.

§. 233. Die Auflösung der Gleichung $x^2=a$, wenn a absolut ist.

§. 234. Sie hat höchstens nur zwey Auflösungen.

§. 235. Erklärung der allgemeinen Quadratwurzel; imaginäre Quadratwurzel.

§. 236. Die reele Quadratwurzel ist positiv und auch negativ.

§. 237. Die allgemeine Quadratwurzel muß daher auch zweydeutig genommen werden, $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$, oder $\pm\sqrt{a}$.

§. 238. Man muß mit $\sqrt{a}$, weil solche zweydeutig ist, vorsichtig operiren.

§. 239. Die Formeln der Wurzeln und das Ableiten des (§. 150.) gilt noch. Spezielle Formeln für die allgemeinen Quadratwurzeln. Mit Vorsicht anzuwenden.

§. 240. Allgemeine Auflösung der Gleichung $x^2 = a$.

§ 241. Die quadratische Gleichung $x^2+ax = b$ nach x aufzulösen.

§. 242. Die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c = 0$ nach x aufgelöst.

§. 243. Die imaginären Auflösungen lassen sich immer auf die Form $P\pm Q\sqrt{-1}$ bringen.

§. 244. Aus zweyen Gleichungen zwischen x und y,

von denen die eine zur 2ten Ordnung, die andre zur ersten Ordnung gehört, x und y zu finden.
§. 245. Es gibt nur zwey Auflösungen für diese Aufgabe.
§. 246. Andre Auflösung. Durch die Kombinations-Methode eliminirt.
§. 247. Die englische Eliminations-Methode darauf angewandt.
§. 248. Auch die französische Methode darauf angewandt.
§. 249. Aus n Gleichungen, unter denen n—1 von der 1ten Ordnung, die nte dagegen von der 2ten Ordnung ist, die n Unbekannten zu finden.

Zweyte Abtheilung. Von den Ausdrücken von der Form ax^2+bx+c noch in's Besondere (§. 250—§. 264). . . . Pag. 293—307.

§. 250. Ist $ax^2+bx+c = 0$ für mehr als 2 Werthe von x, so ist auch $a = 0$, $b = 0$, und $c = 0$.
§. 251. Ist $ax^2+bx+c = a_1x^2+b_1x+c_1$ für mehr als 2 Werthe von x, so ist auch $a = a_1$, $b = b_1$ und $c = c_1$.
§. 252. Ist α ein Werth von x, welcher ax^2+bx+c zu 0 macht, so läßt sich ax^2+bx+c durch $x-\alpha$ ohne Rest dividiren.
§. 253. Den Ausdruck z^2+Az+B in $(z-\alpha)\cdot(z-\beta)$ zu verwandeln.
§. 254. Auch ist allemal $A = -(\alpha+\beta)$ und $B = \alpha\beta$.
§. 255. Der Ausdruck px^2+qx+r in zwey Faktoren zerlegt.
§. 256. $\sqrt{x^2+Ax+B}$ auf die Form $x+\alpha$ zu bringen.
§. 257. $\sqrt{px^2+qx+r}$ auf die Form $\beta x+\alpha$ zu bringen.
§. 258. x^2+Ax+B in $(x+\frac{1}{2}A)^2+(B-\frac{1}{4}A^2)$ verwandelt.
§. 259. px^2+qx+r in $p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2+\frac{4pr-q^2}{4p}$ verwandelt.
§. 260. §. 261. Ist $4pr-q^2$ positiv, also q^2-4pr negativ, so ist px^2+qx+r für alle reelen Werthe von x durchaus positiv oder durchaus negativ, je nachdem p positiv oder negativ ist.
§. 262. Alle reelen Zahlen liegen zwischen $+\infty$ und $-\infty$. Begriff der stetigen Aenderung der reelen Wer-

the. Moment des Verschwindens. Was bedeutet $\pm a > \pm b$? —

§. 263. $x+p$ und $ax+b$ gehen mit x zugleich von $+\infty$ bis zu $-\infty$ stetig fort, wenn a positiv ist; dagegen ändert sich $ax+b$ im umgekehrten Sinne stetig, wenn a negativ ist.

§. 264. Die Werthe von x^2+px+q ändern sich, während x alle stetig neben einander liegenden Werthe von $+\infty$ bis zu $-\infty$ bekommt, stetig, von $+\infty$ bis zu $q-\frac{1}{4}p^2$ abnehmend, dann wieder wachsend bis zu $+\infty$ hin. Diese Werthe sind daher entweder nie, oder zweymal (oder nur einmal) $=0$, je nachdem $q-\frac{1}{4}p^2$ positiv, negativ (oder Null) ist.

Eilftes Kapitel.

Von den Ausdrücken von der Form ax^3+bx^2+cx+d. Von den Werthen von x, welche sie zu Null machen. Von der allgemeinen Kubikwurzel. Von der Auflösung derjenigen Gleichungen mit mehren Unbekannten, welche zu kubischen Gleichungen führen. (§. 265— §. 290.) . . . Pag. 308—343.

Erste Abtheilung. Von der Auflösung der kubischen Gleichung. Von der allgemeinen Kubikwurzel. (§. 265— §. 276.) . Pag. 308—326.

§. 265. Auflösung der reinen kubischen Gleichung, $x^3=a$, wenn a reel ist.

§. 266. Sie hat immer nur 3 Auflösungen.

§. 267. Begriff der allgemeinen Kubikwurzel.

§. 268. Sie ist dreydeutig oder dreyförmig.

§. 269. Die Formeln und Sätze der (§§. 136. 149. und 150.) gelten noch.

§. 270. Sie sind jedoch mit Vorsicht anzuwenden, weil sie nur mit einiger Beschränkung gelten.

§. 271. Allgemeine Auflösung der reinen kubischen Gleichung.

§. 272. Auflösung der allgemeinen kubischen Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$.

§. 273. Umformung des Ausdrucks für x.

§. 274. Cardan'sche Formel.

§. 275. Jede kubische Gleichung läßt nur 3 Auflösungen zu.

§. 276. Wie n Gleichungen mit n Unbekannten, von denen eine von der 3ten Ordnung ist, die übrigen aber einfache sind, aufgelöset werden.

Zweyte Abtheilung. Von den Ausdrücken von der Form ax^3+bx^2+cx+d noch in's Besondere. (§. 276— §. 290.) . . Pag. 226—343.

§. 277. Ist $Ax^3+Bx^2+Cx+D = A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1$ für mehr als 3 Werthe von x, so sind die Koeffizienten A und A_1, B und B_1, ꝛc. einzeln einander gleich.

§. 278. Ist α einer der Werthe von x, welcher x^3+Ax^2+Bx+C zu Null macht, so ist letzterer Ausdruck durch $x-\alpha$ ohne Rest theilbar.

§. 279. Dieser Ausdruck läßt sich daher immer in $(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot(x-\gamma)$ zerlegen.

§. 280. Diese Zerlegung wirklich direkt durchgeführt.

§. 281. Wie α, β, γ mit den Koeffizienten der kubischen Gleichung zusammenhängen.

§. 282. Eine Form $x+\alpha$ für $\sqrt[3]{x^3+Ax^2+Bx+C}$

§. 283. Eine Form $(x+\alpha)^3+\beta(x+\alpha)+\gamma$ statt x^3+Ax^2+Bx+C zu finden.

§. 284. Die letztere Aufgabe direkt.

§. 285. Den Gang der reelen Werthe von x^3+nx^2+px+q auszumitteln, während dem x nach und nach alle stetig neben einander liegenden Werthe, von $+\infty$ an bis zu $-\infty$ hin, gegeben werden.

§. 286. Die kubische Gleichung, deren Koeffizienten reel sind, liefert daher nur eine einzige, oder 3 reele Auflösungen.

§. 287. Wenn n^3-3p positiv nnd $4(n^2-3p)^3>(2n^3-9np+27q)^2$ ist, so sind alle 3 Auflösungen von $x^3+nx^2+px+q=0$ reel; dagegen ist nur eine einzige davon reel, wenn eine der beyden Bedingungen nicht erfüllt ist.

§. 288. Die beyden imaginären Auflösungen der kubischen Gleichung mit reelen Koeffizienten können allemal die Form $P\pm Q\sqrt{-1}$ annehmen.

§. 289. Zwey der reelen Auflösungen sind einander gleich, wenn $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3=0$.

§. 290. In welchen Fällen sind die Auflösungen, wenn sie reel sind, positiv oder negativ? —

Zwölftes Kapitel.

Von den Ausdrücken von der Form $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Von den Werthen von x, welche sie Null machen. Von der allgemeinen Biquadrat-Wurzel. Von der Auflösung derjenigen Gleichungen mit mehr Unbekannten, welche zu biquadratischen Gleichungen mit einem Unbekannten führen. (§. 291—§. 314.). . . . Pag. 343—374.

Erste Abtheilung. Von der Auflösung der biquadratischen Gleichung. Von der allgemeinen Biquadrat-Wurzel. (§.261—§.305.) Pag. 343—363.

§. 291. Von der Auflösung von $x^4 = a$, wenn a absolut ist.

§. 292. Begriff der allgemeinen Biquadratwurzel.

§. 293. Sie ist 4 deutig, und deshalb mit Vorsicht zu behandeln.

§. 294. Es ist allemal $(\sqrt[4]{a})^4 = a$, dagegen bedingt $\sqrt[4]{(a^4)} = a$, und bedingt $\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b}$, wenn $a = b$; und das allgemeine Ableiten der Gleichungen auseinander, findet daher hier mit gewisser Beschränkung statt.

§. 295. Allgemeine Auflösung von $x^4 = a$.

§. 296. Die 4 Werthe von $\sqrt[4]{1}$, sind $1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$. Die 4 Werthe von $\sqrt[4]{a}$ sind daher $\sqrt[4]{a}, -\sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{-1}, -\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{-1}$.

§. 297. Auflösung der allgemeinen Gleichung $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0$.

§. 298. Sie hat nur 4 Auflösungen.

§. 299. Die Gleichung vom 4ten Grade und mit reelen Koeffizienten hat immer Auflösungen von der Form $p \pm q\sqrt{-1}$.

§. 300. Zwey Gleichungen der 2ten Ordnung nach ihren Unbekannten x und y aufzulösen.

§. 301. Elimination von y mittelst der Kombinations-Methode.

§. 302. Anwendung der englischen Eliminationsmethode.
§. 303. Anwendung der franzöſiſchen Eliminations-Methode.
§. 304. Elimination durch Aufſuchung eines gemeinſchaftlichen Faktors.
§. 305. Auflöſung von n Gleichungen nach n Unbekannten, die zu einer Gleichung vom 4ten Grade führen.

Zweyte Abtheilung. Von den Ausdrücken von der Form $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ noch in's Beſondere. (§. 306—314.). . Pag. 363—374.

§. 306. Iſt $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$ für mehr als 4 Werthe von x, ſo iſt auch $A=B=C=D=E=0$.
§. 307. Lehrſätze, den §. §. 278—281. analog.
§. 308. $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$ auf die Form $A(x+\alpha)^4+\beta(x+\gamma)^2+\delta$ gebracht.
§. 309. Dieſer Ausdruck iſt allemal für jeden reelen Werth von x, poſitiv oder negativ, je nachdem A, β und δ alle zugleich poſitiv, oder alle zugleich negativ ſind. Der Satz gilt aber nicht umgekehrt.
§. 310. 311. Der Gang der reelen Werthe von $x^4+nx^3+px^2+qx+r$ für alle reelen Werthe von x, von $+\infty$ zu $-\infty$ hin abnehmend, näher beſtimmt.
§. 312. 313. 314. Anwendungen auf die Auflöſungen der Gleichungen vom 4ten Grade mit reelen Koeſizienten.

Dreizehntes Kapitel.

Von dem Auflöſen der Gleichungen durch Subſtitution, aus andern zugleich mit ihren Auflöſungen gegebenen Gleichungen. (§. 315—§. 320.). . . . Pag. 375—381.

Anhang.

Vierte Anwendung der hier entwickelten Lehren der Zahlen auf die allgemeine Größenlehre (Lehre der benannten Zahlen). (27—35.) Pag. 382—418.

27. Allgemeine algebraiſche Aufgabe. — Immer nur unbenannte Zahlen werden geſucht.
28. Nicht alle Werthe, welche den Gleichungen genügen, löſen die gegebene Aufgabe der Größenlehre.

29. Bedingungen der Möglichkeit einer Aufgabe.
30. Eine zu allgemein gegebene Aufgabe, muß vor ihrer Auflösung in alle speziellen Aufgaben zerfällt werden, welche sie zuläßt.
31. Auflösung derselben.
32. Erleichterungen, die dadurch hervorgehen, daß man aus der Auflösung des einen speziellen Falles, die Auflösungen aller übrigen speziellen Fälle, nach dem im Kapitel selbst gelehrten, durch bloße einfache Substitution ableitet.
33. 34. 35. Wie negative Werthe, die aus der Auflösung der Gleichungen hervorgehen, eine mit der gegebenen sehr nahe verwandte Aufgabe lösen können.

Vierzehntes Kapitel.

Fortsetzung der im 7ten Kapitel abgebrochenen Ziffernrechnung. Insbesondere Rechnung mit allgemein-numerischen Ausdrücken d. h. mit Ausdrücken von der Form $p+q\sqrt{-1}$. (§. 321—332.) . . . Pag. 406—418.

§. 321. I. Ist $m+\frac{p}{q}=m_1+\frac{p_1}{q_1}$, so ist $m=m_1$ und $\frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}$, so oft hier nur positive ganze und nur ächt gebrochene Zahlen vorkommen. II. Ist $m^2+n^2=0$, so ist $m=n=0$.

§. 322. Erklärung der Bezeichnung i statt $\sqrt{-1}$.

§. 323. $i^{4n}=+1$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+1}=+i$; $i^{4n+3}=-i$.

§. 324. $i\sqrt{a}$ und $-i\sqrt{a}$ stellen die beyden Werthe von $\sqrt{-a}$ vor.

§. 325. Aus $p+qi=p_1+q_1i$, folgt $p=p_1$ und $q=q_1$, so oft p, q, p_1, q_1 reel sind.

§. 326. Aus $p+qi=0$ folgt $p=0$, $q=0$.

§. 327. $p+qi$ und p_1+q_1i addirt, subtrahirt, multiplizirt und dividirt.

§. 328. $p+qi$ mit 2, 3, 4, potenzirt.

§. 329. $\sqrt{p+qi}$ gefunden.

§. 330. $\sqrt[3]{p+qi}$ und $\sqrt[4]{p+qi}$ zu finden.

***

§. 331. 332. Jeder bis jetzt mögliche spezielle Ausdruck muß sich auf die Form p+qi bringen lassen, welcher ein allgemein-numerischer Ausdruck genannt wird.

Allgemeine Einleitung.

1.

Der Begriff der Zahl ist ein einfacher Begriff, und uns gegeben; mit ihm der Begriff des Vielfachen und Einfachen.

2.

Jedes Ding, welches selbst keine Zahl, dagegen ein Vielfaches irgend eines andern Dinges ist, oder als ein solches betrachtet werden kann oder muß, heißt eine Größe; jenes andere Ding die Einheit oder das Gemäß; die Zahl des Vielfachen aber das Maaß dieser Größe, für diese Einheit (Gemäß).

3.

Die Wissenschaft, welche sich mit den Zahlen und den Größen beschäftigt, und welche lehrt, wie aus gegebenen Zahlen und Größen andere Zahlen und Größen bestimmten Zwecken gemäß abgeleitet werden, heißt Mathematik.

4.

Da aber die Vergleichung der Größen, in so ferne die Größen an ihren Maaßen erkannt werden, auf die Vergleichung der

Zahlen zurück kommt, so tritt die Lehre der Zahlen als ein allgemeiner Theil der Mathematik hervor, so daß die Größenlehre nur als ein besonderer Fall der Anwendung der erstern erscheint. Die Mathematik zerfällt daher

1) in die Zahlenlehre, welche ihr allgemeinster Theil ist, und

2) in die Größenlehre, welche bloß als eine Anwendung der Zahlenlehre auf die Größen erscheint.

5.

Derjenige Theil der Zahlenlehre der sich mit Aufstellung der ersten Principien beschäftigt, nach welchen Zahlen mit einander verbunden werden können, mag Elementar- oder niedere Zahlenlehre (oder Arithmetik) heißen. Die höhere Zahlenlehre (Analysis) ist dann derjenige Theil, welcher lehrt, mittelst der gedachten Principien, Untersuchungen beliebiger Art über Zahlen anzustellen und zu beendigen. *)

6.

Vereinigt man auf der andern Seite alle diejenigen Sätze, welche von allen Größen gelten, ohne Rücksicht zu nehmen auf eine besondere Gattung derselben, so hat man die allgemeine Größenlehre. Was dann von den Größen besonderer Art noch besonders statt findet, gibt, wenn solches ausgesprochen wird, die besondere Größenlehre.

7.

Zeit und Raum sind einfache Begriffe und gegeben. — Aus ihnen geht hervor, daß begrenzte Zeiten und begrenzte Räume, Größen sind.

---

*) Will man statt Zahlenlehre das fremde Wort Kalkul gebrauchen, wie solches in der neuesten Zeit zuweilen vorkommt, so kann dieß geschehen: dann theilt sich der Kalkul in den niedern oder Elementarkalkul und in den höhern.

8.

Stetige Ortsänderung heißt Bewegung. Die Ursache der Bewegung nennt man Kraft.

9.

Nach dem Satz des zureichenden Grundes beurtheilen wir die Ursachen nach ihren Wirkungen, folglich die Kräfte nach den Bewegungen die sie hervorbringen. Bewegungen unterscheiden wir aber durch die bestimmten Raumgrößen, welche in bestimmten Zeitgrößen zurückgelegt werden; folglich sind auch Kräfte Größen, die nach den vorgenannten Größen beurtheilt werden müssen.

10.

Man erhält hieraus zunächst 2 Haupttheile der besondern Größenlehre; nehmlich: 1) die Raumgrößenlehre, 2) die Kraftgrößenlehre.

Anmerkung. Daß diese 2 Theile die besondere Größenlehre erschöpfen, geht daraus noch nicht hervor. Unter den mannigfaltigen Theilen der besondern Größenlehre sind bloß die beyden hier genannten, die für uns wichtigsten und diejenigen, welche einer besondern nähern Betrachtung vorzüglich unterworfen werden.

11.

Vergleicht man alles vorhergehende, so bekommt man folgendes Schema der Mathematik:

Mathematik.

I. Zahlenlehre.
   1) Elementarzahlenlehre.
   2) Höhere Zahlenlehre.

II. Größenlehre
   1) Allgemeine.
   2) Besondere.
      α) Raumgrößenlehre.
      β) Kraftgrößenlehre.

Anmerkung. Soll die Mathematik eine sogenannte Wissenschaft a priori, oder eine reine Vernunftwissenschaft bleiben, so darf man nicht Erfahrungssätze in sie aufnehmen. Unter dieser Voraussetzung hat man z. B. nicht mehr Mathematik sondern Physik, sobald man in der Kraftgrößenlehre bestimmte in der Natur wirkende Kräfte betrachtet, und so ist die Mathematik von ihrer Anwendung strenge geschieden, weshalb der Unterschied zwischen reiner und angewandter Mathematik in der Mathematik als reinen Vernunftwissenschaft nicht aufgestellt werden darf. Die Mathematik ist unter dieser Voraussetzung immer eine reine.

Zahlenlehre.

Zahlenlehre.

Einleitung.

§. 1. Grundsatz.

Die Zahl und mit ihr die absolute (abstrakte) Einheit, wird hier, als uns gegeben angesehen. Die Einheit bezeichnet man durch das Zeichen **1** (Eins).

§. 2. Zusatz.

Die Zahlen erscheinen uns:

1) in einer Reihe, so daß wir, um zu einer zu gelangen, alle vorhergehenden von der **1** ab, an unserm Geiste vorübergehen lassen müssen; und wir nennen jede folgende Zahl die größere, so wie jede vorhergehende die kleinere;
2) als durch diese Folge von einander verschieden;
3) als mit einander verbindbar zu einer neuen Zahl, und zwar dergestalt, daß wir immer erst zwey Zahlen zu einer dritten, und diese dann erst wieder mit einer neuen verbinden, so daß jedesmal nie mehr als zwey Zahlen mit einander verbunden werden.

§. 3. Erklärungen.

Zwey Zahlen können aber zunächst auf folgende Arten mit einander verbunden gedacht werden:

1) Man kann sie zu einander addiren, d. h. man kann sich eine Zahl denken, die so viele Einheiten hat, als die beyden gegebenen Zahlen zusammengenommen haben.

2) Es kann die eine mit der andern multiplizirt werden, d. h. man kann die eine so vielmal nehmen, als die andere anzeigt, und diese alle zu einander addiren.

3) Man kann die eine mit der andern potenziren; d. h. die eine so vielmal nehmen als die andere anzeigt, und diese alle mit einander multipliciren.

Diese 3 Verbindungsarten nennt man direkte Operationen.

Jede dieser direkten Operationen läßt aber wieder zwey indirekte oder umgekehrte zu, indem man von der dritten Zahl zu jeder der beyden ersten zurückkehren kann. Dies gibt daher noch 6 indirekte Operationen, nehmlich:

4) Zwey, die das umgekehrte der Addition sind, und, weil sie beyde mit einander übereinstimmend gefunden werden, den gemeinschaftlichen Namen der Subtraktion führen.

5) Zwey, die das umgekehrte der Multiplication sind, und, in so ferne sich beyde nicht von einander unterscheiden, den gemeinschaftlichen Namen der Division haben; endlich

6) Zwey, die das umgekehrte des Potenzirens sind, und von denen die eine die Radikation,

7) die andere aber die Logarithmation genannt werden mag.

Anmerkung 1. Man kann auf dieselbe Weise noch mehr, ja unendlich viele direkte Operationen annehmen, von denen dann jede wieder zwey indirekte zulassen würde.

Anmerkung 2. Der Grund, warum die beyden indirekten Operationen der Addition, so wie die beyden der Multiplikation in eine einzige zusammenfallen, liegt darin, daß, wie wir sehen werden, die beyden zu addirenden, so wie die beyden zu multiplizirenden Zahlen, sich in Bezug auf die dritte Zahl als Resultat, in nichts von einander unterscheiden, daher mit einander verwechselt werden können.

§. 4. Erklärung.

Die Wissenschaft, diese sieben Operationen mit einander zu vergleichen und durch sie Zahlen mit andern Zahlen auf bestimmte Weise zu verbinden, heißt Zahlenlehre.

§. 5. Zusatz.

Da aber die Zahlen und ihre Verbindungen Gegenstände unserer innern Anschauung sind, und nur dadurch zu Dingen außer uns werden, daß wir Zeichen für sie setzen, so geht die Zahlenlehre sogleich in eine Zahlzeichenlehre über, die nur in so ferne wieder zur Zahlenlehre wird, als durch die jedesmaligen Zahlzeichen in uns der Begriff der durch sie bezeichneten Zahlen erregt werden kann.

§. 6. Erklärung.

Man bezeichnet aber die Zahlen, die man nicht in Bezug auf ihre Stelle in der Zahlenreihe unterscheiden kann oder will, durch beliebige für den Augenblick gewählte Zeichen; am bequemsten durch Buchstaben. Diese Zeichen heißen dann unbestimmte Zahlzeichen, zum Unterschiede von den bestimmten, welche bestimmte Zahlen der Zahlenreihe bezeichnen, und welche wir in der Folge in Betrachtung ziehen wollen.

Es mag hier nur vorläufig bemerkt werden, daß wir die ersten auf einander folgenden Zahlen der Zahlenreihe durch die Zeichen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

und durch die entsprechenden Worte

Eins, Zwey, Drey, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun

ausdrücken oder vorstellen.

§. 7. Erklärung.

Jedes Zahlzeichen, und späterhin schon jedes Zeichen, welches die Form eines Zahlzeichens hat, nennen wir Zahlen-Ausdruck oder schlechtweg Ausdruck.

§. 8. Erklärung.

Sind a und b zwey Ausdrücke, und schreibt man

$$a = b,$$

so nennt man das Ganze eine Gleichung; und diese Gleichung wird ausgesprochen „a ist gleich b" und bedeutet, daß beyde Ausdrücke a und b eine und dieselbe Zahl vorstellen. — Das

Zeichen (=), nennt man das Gleichheitszeichen. Die gleichen Ausdrücke heißen auch die Seiten der Gleichung.

§. 9. Zusätze.

Da demnach zwey gleiche Ausdrücke a und b nur der Form nach verschieden sind, dagegen einerlei Bedeutung haben, so folgt, daß man sie überall für einander setzen kann, wo es nicht auf die Form, sondern nur auf die Bedeutung ankommt. — Daher ergeben sich noch mehrere Sätze, unter denen wir folgenden herausheben:

Wenn zwei Ausdrücke einem dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich; d. h. wenn a=b und b=c, so ist auch a=c.

Zahlenlehre.

Erstes Kapitel.

Von den Zahlen-Verbindungen der ersten Art. Von der Null und von den additiven und subtraktiven Ausdrücken. Von den algebraischen Summen.

Vorerinnerung.

Die Vorerinnerungen zu den einzelnen Kapiteln sollen jedesmal kurz und anschaulich die Gründe angeben, aus welchen das Kapitel gerade dieses und nicht anderes geben durfte, wenn die, das Ganze leitende Idee mit Consequenz verfolgt werden sollte.

Man begreift aber leicht, daß, wenn dieses Werk die Absicht hat, in einer folgerechten Kette, was für die Zahlen und Größen gilt, zu zeigen, solches nicht mit der gemeinen Rechenkunst beginnen dürfe, weil die Gesetze, nach denen sich die Operationen richten, und auf welche die Verfahrungsarten der gemeinen Rechenkunst sich gründen, vorher entwickelt worden seyn müssen. — Es gibt daher dieses Kapitel zuerst das allgemeine Verhalten des Addirens und Subtrahirens zu einander, und überläßt es einem spätern Kapitel, dieses allgemeine Verhalten der Operationen anzuwenden, um die entsprechenden praktischen Verfahrungsarten des gemeinen (und des sogenannten Buchstaben-) Rechnens daraus abzuleiten.

Die nothwendigste Folge dieser Ansicht ist: aus der gemeinen Rechenkunst nichts voraus zu setzen, also namentlich auch nicht den Begriff der Null, weil gerade die hiesigen Untersuchungen ihn erst geben müßen, und ihn auf eine Art geben, wie er nachgehends durchaus und überall, in der gemeinen Rechenkunst wie im höhern Kalkul, ohne alle Abänderung oder Modifikation in Anwendung kommt.

Wie aber in der vorstehenden Einleitung gezeigt ist, so ist das Addiren und das Subtrahiren der Zahlen ein bloßes Denkgeschäft, ein Geschäft (Operation) des Verstandes. Weil jedoch die Zahlen durch Zeichen (z. B. Buchstaben) vorgestellt werden, so muß man ein Addiren und ein Subtrahiren der Zahlzeichen hinstellen, dem Addiren und Subtrahiren der Zahlen entsprechend, d. h. es muß gelehrt werden, wie man ein neues Zahlzeichen bildet, welches der neuen Zahl entspricht. — Dies ist zunächst in dem gegenwärtigen Kapitel nachgewiesen. — Später nimmt man die Frage noch praktischer, und verlangt sogar Zahlzeichen von vorgeschriebener Form, welche abermals den erwähnten neuen Zahlen entsprechen. Dies giebt das praktische Addiren und Subtrahiren der gemeinen Rechenkunst, der sogenannten Buchstabenrechnung, u. s. w., von welchem jedoch in diesem ersten Kapitel nur das Addiren und Subtrahiren der additiven und subtraktiven Ausdrücke und das der algebraischen Summen vorkommt.

Vorher hat dieses Kapitel nachzuweisen, wie Summen von der Form $a+b$, und Differenzen von der Form $a-b$, und einfache Zahlzeichen von der Form c, paarweise addirt und subtrahirt werden, d. h. nach welchen Gesetzen diese Verbindungen sich richten, in so ferne andere Verbindungen, die mit den eben erwähnten gleichbedeutend seyn sollen, zu bilden sind. Diese Gesetze, einfach verbildlicht, sind die Normen oder Formen oder Formeln, nach welchen sich nachgehends alle ähnlichen Verbindungen richten müssen.

Soll aber das Verhalten dieser Operationen wirklich ganz allgemein ausgesprochen werden, so muß man sich dabey nicht um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben oder Zahlzeichen zu bekümmern haben; eben damit man etwas habe, was bloß vom Operiren gilt, und unabhängig von dem, womit operirt wird; folglich anwendbar, so oft man operirt. Deshalb hat dieses Kapitel noch zu zeigen, daß die Gegensätze und die Beziehungen zwischen dem Addiren und Subtrahiren, ganz allgemein aufgefaßt werden können und dürfen, und daß die Gesetze des Operirens auch für bloße angezeigte Operationen, d. h. für bloße Zeichen von der Form $a+b$ oder von der Form $a-b$ beybehalten werden können und müssen, ohne daß man sich um die Bedeutung von a oder von b zu bekümmern hätte. Solche Formeln lehren dann nichts von der Zahl, aber sie lehren noch immer die Beziehungen und die Gegensätze, in denen die Operationen zu einander stehen.

Dieses allgemeine Auffassen und Behandeln der Summe $a+b$ und der Differenz $a-b$, hat dann nothwendig zur Folge die Betrachtung und Behandlung der speciellen Differenz $p-p$, die durch ein kürzeres Zeichen 0 (Null) bezeichnet werden kann; so wie auch noch der speciellen Summen und Differenzen, welche die Form $0+b$ und $0-b$ haben, die wir, etwas abgekürzt, bloß durch $+b$ und $-b$ zu bezeichnen pflegen, und die hier die Namen der additiven und der subtractiven Ausdrücke erhalten haben.

Zuletzt muß der Uebergang zur Praxis gemacht werden; daher in der zweyten Abtheilung dieses Kapitels noch die Erweiterungen und namentlich die Sätze von den algebraischen Summen, welche bloß praktische Tendenz haben, jedoch eben aus dem vorhergehenden mit Nothwendigkeit hervorgehen und abgeleitet werden müssen.

Erste Abtheilung.

Einfachste Gesetze der Zahlen-Verbindungen der ersten Art.

§. 10. Erklärungen.

Unter der Summe a+b (ausgesprochen „a plus b"), welche aus den beyden Summanden a und b besteht, denken wir uns diejenige Zahl vorgestellt, welche so viele Einheiten hat, als die Zahlen a und b zusammengenommen haben. — Unter der Differenz a—b dagegen, (ausgesprochen „a minus b"), welche aus einem Minuenden a und einem Subtrahenden b besteht, wollen wir diejenige Zahl vorstellen, die, wenn man sie zur Zahl b (zum Subtrahenden) addirt [im Sinne des (§. 3.)], die Zahl a (den Minuenden) wieder giebt. — Man hat aber die Ausdrücke (vergl. §. 7.) a und b zu einander addirt, oder den Ausdruck b von dem andern a, subtrahirt, in dem Augenblick, wo man diese neuen Zeichen (Ausdrücke) a+b oder a—b hingeschrieben hat.

Note. Die Zahl 8 kann zusammengesetzt seyn aus 5 und 3 durch Addition; auch aus 10 und 2 durch Subtraktion. In ersterer Beziehung heißt sie Summe, in letzterer wird sie Differenz genannt. Also versteht man, auch im gewöhnlichen Sinne, unter der Summe nicht die Zahl 8, sondern bloß die Zusammensetzung aus 5 und 3, also das Zeichen 5+3; so wie auch die Zahl 8 selbst, nicht unter dem Worte Differenz verstanden wird, sondern ihre Zusammensetzung aus 10 und 2, also das Zeichen 10—2, welches noch immer dieselbe Zahl (8) vorstellt, zugleich aber auch die Zusammensetzung derselben aus den beyden andern Zahlen 10 und 2. — Daher sind hier oben (und so muß dies in der Folge immer geschehen) die Zeichen a+b, a—b, — nicht aber die dadurch bezeichneten Zahlen — Summe und Differenz genannt worden.

§. 11. Zusatz.

1) Stellen a und b Zahlen vor, so bedeutet a+b allemal auch eine Zahl, aber nur eine einzige; während a—b nur dann wirklich eine Zahl vorstellt, aber jedesmal auch nur eine einzige, wenn a größer ist als b. — So oft also a+b oder a—b eine Zahl vorstellt, so oft ist jedes dieser Zeichen doch nur eindeutig; d. h. es giebt jedesmal nicht mehr als eine einzige Zahl, welche den in a+b oder a—b ausgesprochenen Bedingungen entspricht.

2) Wird eine Summe oder eine Differenz als Zahlzeichen auf's neue mit einem Ausdruck verbunden, so muß sie, soll die Bedeutung des ganzen Ausdrucks nicht zweifelhaft werden, allemal noch erkennbar bleiben. Dies geschieht am bequemsten dadurch, daß man sie in Klammern einschließt. Diese Klammern dürfen späterhin nur dann fehlen oder weggelassen werden, wenn man sich überzeugt hat, daß durch diese Weglassung keine Unbestimmtheit des ganzen Ausdrucks entsteht.

3) Es ist allemal $a+b=b+a$.

Denn jedesmal hat man die Zahl, die so viele Einheiten hat, als die Zahlen a und b zusammengenommen haben.

4) Zwey gleiche Ausdrücke zu zwey gleichen Ausdrücken addirt oder von letzteren subtrahirt, geben immer auch gleiche Resultate; d. h. ist

$a=b$ gegeben, so ist auch

1) $a+c=b+c$
2) $c+a=c+b$
3) $a-c=b-c$
4) $c-a=c-b$.

Und ist auch noch $c=d$ gegeben, so folgt noch:

5) $a+c=b+d$
6) $c+a=d+b$
7) $a-c=b-d$
8) $c-a=d-b$.

Denn es geht solches unmittelbar aus den (§§. 8 und 9) hervor.

§. 12. Zusatz.

Ferner folgen aus den, (§. 10.) gegebenen Begriffen, noch unmittelbar folgende Sätze:

I. $(a-b)+b=a$;

d. h. „Wenn man zu einer Differenz a—b, ihren Subtrahenden b wieder addirt, so kommt der Minuend a";

oder auch

„Eine Zahl a bleibt unverändert, wenn man zuerst eine andere Zahl b von ihr subtrahirt, nachher aber zu dem Resultat dieselbe Zahl b wiederum addirt."

II. $(a+b)-b=a$;

d. h. „Wenn von einer Summe a+b, der eine Summand b subtrahirt wird, so bleibt der andere Summand a übrig;"

oder auch

„Eine Zahl a bleibt unverändert, wenn man zuerst eine andere Zahl b addirt, und dann von der erhaltenen Summe a+b dieselbe Zahl b wiederum subtrahirt."

III. $a-(a-b)=b$;

d. h. „Wenn eine Differenz a—b, von ihrem Minuenden a subtrahirt wird, so ergiebt sich ihr Subtrahend b";

oder auch

„Eine Zahl b bleibt unverändert, wenn man solche zuerst von einer andern Zahl a subtrahirt, und diese Differenz nochmal von derselben Zahl a subtrahirt."

Die Richtigkeit der letztern Formel (III.) erhellet auch noch insbesondere, wenn man auf beyden Seiten der Gleichung (I.), a—b subtrahirt, nach (§. 11. Nr. 4.).

§. 13. Lehrsätze.

Die Lehrsätze, welche lehren, wie man die einfache Zahl und die Summe oder die Differenz zu einander addirt und von einander subtrahirt, sind aber folgende:

1) $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c)$;
2) $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$;
3) $(a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c)$;
4) $(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c)$;
5) $a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b$;
6) $a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b$;
7) $a+(b-c)=(a+b)-c=(a-c)+b$;
8) $a-(b-c)=(a-b)+c=(a+c)-b$;
9) $(a+b)=(a+c)+(b-c)=(a-c)+(b+c)$
$=(a+c)-(c-b)$;
10) $a-b=(a+c)-(b+c)=(a-c)-(b-c)$
$=(a-c)+(c-b)$;

welche nachstehend weiter erörtert werden sollen.

Lehrsatz 1. Zu einer Summe $a+b$ wird eine Zahl c addirt, wenn man diese Zahl c zu einem der Summanden addirt, den andern Summanden aber unverändert läßt, d. h.

$$(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c).$$

Denn in jedem Falle hat man offenbar die Zahl, welche so viele Einheiten hat, als a und b und c zusammengenommen haben.

Lehrsatz 2. Von einer Summe $a+b$ wird eine Zahl c subtrahirt, wenn man solche Zahl c von einem der Summanden subtrahirt, den andern Summanden aber unverändert läßt; d. h.

$$(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c).$$

Denn es ist $[(a-c)+b]+c=[(a-c)+c]+b$ nach (1.);
also nach (§.12.I.) $[(a-c)+b]+c = a+b$;
demnach, wenn man c auf beyden Seiten subtrahirt, nach (§. 11. Nr. 4.)

$$(a-c)+b = (a+b)-c.$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich der andere Theil des Lehrsatzes; auch dadurch, daß man in der so eben erwiesenen Gleichung statt a durchaus u und statt b durchaus v schreibt, nachgehends aber statt u durchaus b und statt v durchaus a wiederum setzt. Dies letztere kommt aber darauf hinaus, in der eben erwiesenen Gleichung a und b mit einander zu verwechseln, und dann statt $b+a$ wiederum $a+b$ und statt $(b-c)+a$ wiederum $a+(b-c)$ zu setzen, nach (§. 11. Nr. 3.).

Lehr-

Lehrsatz 3. Zu einer Differenz a—b wird eine Zahl c addirt, wenn man letztere zu dem Minuenden a addirt und den Subtrahenden b unverändert läßt; oder auch, wenn man diese Zahl c von dem Subtrahenden b subtrahirt, und den Minuenden a unverändert läßt; d. h. es ist

$$(a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c).$$

Denn es ist

$$[(a-b)+c]+b=[(a-b)+b]+c=a+c \text{ nach (1.).}$$

Und hievon subtrahire man b auf beyden Seiten. —

Ferner ist nach (1.) und nach (§. 12. I.):

$$[(a-b)+c]+(b-c)=(a-b)+[c+(b-c)]=(a-b)+b=a;$$

und hievon subtrahire man (b—c) auf jeder Seite. (§. 11. Nr. 4.).

Lehrsatz 4. Von einer Differenz a—b wird eine Zahl c subtrahirt, wenn man letztere von dem Minuenden a subtrahirt, und den Subtrahenden b unverändert läßt; oder auch, wenn man die Zahl c zu dem Subtrahenden b addirt, und den Minuenden a unverändert läßt; d. h. es ist

$$(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c).$$

Denn es ist nach (3.) und nach (§. 12. I.):

$$[(a-b)-c]+b=[(a-b)+b]-c=a-c;$$

und hievon subtrahire man b auf beyden Seiten. —

Ferner ist nach (3.)

$$[(a-b)-c]+(b+c)=[(a-b)+(b+c)]-c$$

und $(a-b)+(b+c)=(b+c)+(a-b)=[b+(a-b)]+c=a+c;$

also auch, wenn man hier c auf beyden Seiten subtrahirt, nach (§. 9.):

$$[(a-b)-c]+(b+c)=(a+c)-c=a.$$

Subtrahirt man nun hievon b+c auf beyden Seiten, so ergibt sich die zweyte Behauptung des Lehrsatzes.

Lehrsatz 5. Eine Summe b+c wird zu einer Zahl a addirt, wenn man zu letzterer einen der Summanden nach dem andern addirt; d. h.

$$a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b.$$

Denn in jedem Falle erhält man die Zahl, die so viele Einheiten hat, als alle 3 Zahlen a, b, c deren zusammengenommen haben. — Auch ist dieser Satz nach (§. 11. Nr. 3.) kein anderer als der (1.).

Lehrsatz 6. Eine Summe $b+c$ wird von einer Zahl a subtrahirt, wenn man einen der Summanden nach dem andern subtrahirt; d. h.

$$a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b.$$

Denn es ist nach (3.) und (§. 12. II.):

$$[a-(b+c)]+c=a-[(b+c)-c]=a-b;$$

folglich, wenn man auf beyden Seiten c subtrahirt, ꝛc. ꝛc.

Lehrsatz 7. Eine Differenz $b-c$ wird zu einer Zahl a addirt, wenn man zuerst den Minuenden b addirt, nachher den Subtrahenden c wieder davon subtrahirt; oder auch, wenn man zuerst den Subtrahenden c subtrahirt und nachher den Minuenden b noch dazu addirt; d. h.

$$a+(b-c)=(a+b)-c=(a-c)+b.$$

Denn es ist nach (1.) und (§. 12. I.):

$$[a+(b-c)]+c=a+[(b-c)+c]=a+b;$$

und hievon subtrahire man c auf beyden Seiten. —

Ferner ist auch, nach (1.) und (§. 12. I.):

$$[(a-c)+b]+c=[(a-c)+c]+b=a+b;$$

also auch, wenn man dies mit obigem nach (§. 9.) verbindet

$$[a+(b-c)]+c=[(a-c)+b]+c,$$

woraus auch die zweyte Behauptuug des Lehrsatzes hervorgeht, wenn man c auf beyden Seiten subtrahirt.

Lehrsatz 8. Eine Differenz $b-c$ wird von einer Zahl a subtrahirt, wenn man den Minuenden b subtrahirt, und den Subtrahenden c wiederum dazu addirt; oder auch, wenn man den Subtrahenden c zuerst addirt, dann aber den Minuenden b wiederum davon subtrahirt; d. h.

$$a-(b-c)=(a-b)+c=(a+c)-b.$$

Denn es ist nach (4.) und (§. 12. I.):

$$[a-(b-c)]-c=a-[(b-c)+c]=a-b;$$

und hiezu addire man c auf beyden Seiten.

Eben so ist nach (3.) und nach (1.) und nach (§. 12. II.):

$$[(a+c)-b]+(b-c)=[(a+c)+(b-c)]-b$$
$$=\big(a+[c+(b-c)]\big)-b=(a+b)-b=a;$$

und hieraus ergibt sich wieder die zweyte Behauptung des Lehrsatzes, wenn man b—c auf beyden Seiten subtrahirt.

Lehrsatz 9. Eine Summe a+b bleibt unverändert, wenn man eine und dieselbe Zahl c zu dem einen der Summanden addirt und zugleich von dem andern subtrahirt; oder auch: eine Summe a+b wird in eine Differenz (a+c)—(c—b) verwandelt, wenn man eine Zahl c zu dem einen Summanden addirt, dann den andern Summanden von derselben Zahl c subtrahirt, und letztere Differenz zum Subtrahenden, erstere Summe aber zum Minuenden nimmt;

d. h. $(a+b)=(a+c)+(b-c)=(a-c)+(b+c)$
$=(a+c)-(c-b).$

Lehrsatz 10. Eine Differenz a—b bleibt unverändert, wenn man eine und dieselbe Zahl c zu dem Minuenden und dem Subtrahenden zugleich addirt, oder von beyden zugleich subtrahirt; oder auch: eine Differenz a—b wird in eine Summe verwandelt, wenn man eine beliebige Zahl c von dem Minuenden a subtrahirt, dann den Subtrahenden b von derselben Zahl c subtrahirt, und zuletzt beyde Differenzen a—c und c—b addirt;

d. h. $a-b=(a+c)-(b+c)=(a-c)-(b-c)$
$=(a-c)+(c-b).$

Die Beweise dieser letztern beyden Sätze fallen zu sehr in die Augen, als daß ihre besondere Anführung nöthig wäre.

Anmerkung 1. Die Beweise aller vorstehenden 10 Lehrsätze können auf sehr viele verschiedene Weise geführt werden. Die Auffindung der meisten der hier gegebenen, ist dadurch bedingt gewesen, daß man einen der, in dem ganzen Ausdruck oder auch in den Theil-Ausdrücken vorkommenden Subtrahenden, auf beyden Seiten der zu erweisenden Gleichungen addirte, oder einen der vorkommenden Summanden subtrahirte, und zusah, ob auf beyden Seiten gleiche Resultate herauskommen. War dies in Gedanken geschehen, so suchte man diese letztere Gleichung zuerst herzustellen, und dann von ihr aus durch Subtraktion oder Addition des erstgedachten Subtrahenden oder Summanden (auf jeder Seite der Gleichuug) zur Gleichung des zu erweisenden Lehrsatzes zurückzukommen.

Anmerkung 2. Auch sieht man leicht, daß mehre dieser 10 Lehrsätze nicht sehr, zuweilen wesentlich wohl gar nicht, von einander verschieden sind. Es war aber die Absicht, hier die Summe und die einfache Zahl, ferner die Differenz und die einfache Zahl zu einander zu addiren und von einander zu subtrahiren, und die gefundenen Resultate für den künftigen praktischen Bedarf zusammenzustellen, damit man desto übersichtlicher erkennen möge, wie gerade die hier aufgestellten einfachsten Gesetze hinreichen, um alle in der Addition und Subtraktion vorkommenden Aufgaben danach behandeln und lösen zu können.

§. 14. Zusatz.

Betrachtet man die Beweise dieser Lehrsätze des (§. 13.), so findet sich, daß diese Sätze bloß abgeleitet sind

α) aus den Sätzen

1) $a+b=b+a$,
2) $(a+b)+c=(a+c)+b$,
3) $(a-b)+b=a$,
4) $(a+b)-b=a$,
5) $a-(a-b)=b$;

von welchen die beyden erstern das Grundwesen der Addition, die 3 letzten aber die reinen Gegensätze zwischen der Addition und den beyden Subtraktionen (§. 3.) aussprechen; — in Verbindung mit

β) den Sätzen (§. 11. Nr. 4.), daß nämlich Gleiches zu Gleichem addirt oder von Gleichem subtrahirt, Gleiches wiederum gibt; — und in Verbindung mit

γ) dem Satze (§. 9.), daß wenn zwey Ausdrücke einem dritten gleich sind, solche auch unter sich gleich seyn müssen.

Wendet man aber dieselben Sätze (α, β und γ) auf's neue wiederum auf die Gleichungen des (§. 13.) an, und überhaupt auf jede entstehende Gleichung, so bilden sich ohne Ende neue Gleichungen, von denen jede in Worte gekleidet werden könnte.

Umgekehrt wird jede Gleichung, deren beyde Seiten bloß durch Zahlen-Verbindungen der ersten Art zusammengesetzt sind, nur auf dem eben beschriebenen Wege aus jenen ersten Elementen (α, β. und γ), und mittelst derselben, abgeleitet.

§. 15. Zusatz.

Untersucht man aber diese Gleichungen, und zunächst die Lehrsätze des (§. 13.) hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit, so findet man leicht, daß wenn die in allen diesen 10 Lehrsätzen links (d. h. zuerst) verlangten Operationen als möglich vorausgesetzt werden, die Verwandlungen des 1sten, 4ten, 5ten und 6ten Lehrsatzes alle unbedingt möglich sind; daß dagegen die Verwandlungen im 2ten, des Ausdrucks $(a+b)-c$ in $(a-c)+b$ oder in $a+(b-c)$, beziehlich nur dann möglich sind, wenn a größer als c, oder wenn b größer als c ist; daß eben so im 3ten, die Verwandlung von $(a-b)+c$ in $a-(b-c)$ nur dann möglich ist, wenn b größer als c; daß ferner die Verwandlung im 7ten, des Ausdrucks $a+(b-c)$ in den andern $(a-c)+b$, nur möglich ist, wenn a größer als c; daß endlich im 8ten, die Verwandlung von $a-(b-c)$ in $(a-b)+c$ nur möglich seyn könne, wenn a größer als b ist.

Die Anwendung dieser letzt erwähnten Formeln (Gleichungen) zur Verwandlung gegebener (als möglich gedachter) Ausdrücke, kann daher nur mit den eben bemerkten Einschränkungen statt finden, wenn man nicht zu unmöglichen Formen gelangen will, d. h. zu Subtraktionen, die nicht als ausführbar gedacht werden können, und zu Additionen, wo die zu addirenden Ausdrücke bereits solche unmögliche Formen geworden sind.

Anmerkung. Dem aufmerksamen Beobachter dieser Lehrsätze (§. 13. Nr. Nr. 2, 3, 7 und 8, auch 9 und 10) entgeht aber auch nicht, daß, wenn man diese in einigen Fällen (d. h. für gewisse Zahlen a, b, c) unmöglich werdenden Verwandlungen, im allgemeinen (d. h. so lange a, b, c noch ganz und völlig unbestimmte Zahlen vorstellen) zuläßt, diese neuen Formen entweder an sich schon möglich sind, oder dadurch auf mögliche und richtige Resultate zurückgeführt werden, daß man, wo die unmögliche Differenz $p-q\left\{\begin{matrix}\text{addirt}\\\text{subtrahirt}\end{matrix}\right\}$ werden soll, dafür die umgekehrte (und nun mögliche) Differenz $q-p\left\{\begin{matrix}\text{subtrahirt}\\\text{addirt}\end{matrix}\right\}$ *). So wie

*) Man könnte hieraus ableiten, daß wenn q eine Zahl ist, größer als p, und die Zahl $q-p$ durch r vorgestellt wird, und wenn man die umgekehrte und unmögliche Differenz $p-q$ durch $-r$ bezeichnet, die Lehrsätze des (§. 13.) im Allgemeinen beybehalten, und also ohne alle

man nämlich die unmöglichen Formen im letztern Sinne auf mögliche reducirt sich denkt, so wird man allemal Gleichungen haben, welche nichts unmögliches verlangen, und welche zu gleicher Zeit unter den Lehrsätzen des (§. 13.) selbst wieder zu finden, also richtig seyn werden.

Aus dieser Bemerkung dämmert zugleich sowohl die Möglichkeit als auch die Nothwendigkeit hervor, unsre Gleichungen in einem allgemeinern Sinne aufzufassen, damit man sie anwenden könne, auch wenn die Zahlen a, b, c noch ganz unbestimmt sind, die erhaltenen Umwandlungen also bald mögliche, bald auch unmögliche Formen enthalten können. Diese Dämmerung in helles Licht zu verwandeln muß aber spätern (§. §.) vorbehalten bleiben.

§. 16. Aufgabe.

Den Ausdruck zu finden, von welchem a subtrahirt, b gibt.

Auflösung. Bezeichnet man den gesuchten Ausdruck einstweilen durch x, so hat man

$$1)\quad x - a = b;$$

also, wenn a auf beyden Seiten addirt wird,

$$2)\quad x = a + b;$$

und $a+b$ ist der gesuchte Ausdruck.

Beweis. Denn die Gleichung (2.) ist offenbar eine richtige, nämlich $a+b=a+b$, sobald man sich unter x den Ausdruck $a+b$ vorgestellt denkt. Subtrahirt man aber von der nun richtigen Gleichung (2.)

Einschränkung zugelassen werden könnten, sobald man nur zu gleicher Zeit annimmt, daß, wo $-r$ addirt werden soll, die Zahl r selbst subtrahirt, oder wo $-r$ subtrahirt werden soll, eigentlich die Zahl r selbst addirt werden müsse. Diese nothwendige Annahme, ohne welche die Lehrsätze nicht allgemein und sonder Einschränkung zur Verwandlung der Ausdrücke zugelassen werden dürften, könnte dann im Lapidarstyle so geschrieben werden

$$1)\ +(-r) = -r \qquad \text{und} \qquad 2)\ -(-r) = +r,$$

wenn nur diese letztere Gleichungen (1. und 2.) in keinem andern Sinne genommen werden, als daß man unter dem Addiren von $-r$ nichts anders verstanden wissen wolle, als das Subtrahiren der Zahl r, oder daß man unter dem Subtrahiren von $-r$ verstanden wissen wolle das Addiren der Zahl r. — Diese und ähnliche Betrachtungen sind aber viel zu einseitig, als daß sie hier einer allgemeinen Behandlung zu Grunde gelegt werden könnten.

wiederum a auf beyden Seiten, so geht die Gleichung (1.) hervor, welche also nach (§. 11. Nr. 4.), unter derselben Voraussetzung, ebenfalls richtig seyn muß.

§. 17. Aufgabe.

Den Ausdruck zu finden, welcher von a subtrahirt, b gibt.

Auflösung. Wird dieser auch einstweilen durch x bezeichnet, so hat man

$$1)\quad a - x = b.$$

Subtrahirt man diese beyden gleichen Ausdrücke von a, so erhält man nach (§. 12. III.):

$$2)\quad x = a - b;$$

und a—b ist der gesuchte Ausdruck.

Beweis. So wie x den Ausdruck a—b vorstellt, ist die Gleichung (2.) offenbar richtig, nämlich a—b=a—b. Subtrahirt man aber ihre beyden Seiten von a, so ergibt sich die (1.), welche also, unter derselben Voraussetzung, daß x den Ausdruck a—b vorstellt, nach (§. 11. Nr. 4.) ebenfalls richtig seyn muß.

§. 18. Aufgabe.

Den Ausdruck zu finden, welcher zu a, oder zu welchem a addirt, die Zahl b gibt.

Auflösung. Bezeichnet x einstweilen diesen Ausdruck, so muß

$$1)\quad x + a = a + x = b \text{ seyn.}$$

Subtrahirt man hievon a auf beyden Seiten, so erhält man

$$2)\quad x = b - a;$$

und b—a ist der gesuchte Ausdruck.

Der Beweis ist wie die vorstehenden.

§. 19. Zusatz.

Man sieht leicht, daß die erstere dieser 3 Aufgaben (§§. 16—18.) allemal möglich ist, welche Zahlen unter a und b nur immer vorgestellt seyn mögen; daß aber von der 2ten und 3ten Aufgabe, für gegebene bestimmte Zahlen a und b, allemal nur die eine möglich ist.

Anmerkung. So oft in der 2ten Aufgabe a kleiner als b ist, so oft zeigt das Resultat a—b an, daß sie selber nicht mehr möglich ist, daß dagegen nun die dritte allemal möglich seyn werde, d. h. daß es dann keine durch a—b vorgestellte Zahl gibt, welche von a subtrahirt, b hervorbringt; dagegen daß nun eine durch b—a vorgestellte Zahl existire, welche zu a addirt, b wieder gibt.

Und so oft in der 3ten Aufgabe a größer als b ist, so zeigt das Resultat b—a nun an, daß sie unmöglich ist, daß dagegen nun die 2te möglich sey, d. h. daß es nun keine durch b—a vorgestellte Zahl gibt, welche zu a addirt, b geben könnte, daß dagegen eine durch a—b vorgestellte Zahl existire, welche von a subtrahirt, die Zahl b hervorbringt.

In den Fällen, wo die Zahlen a und b noch unbestimmt sind, so daß eben so gut a größer, als auch kleiner als b seyn kann, ist es wünschenswerth, solche verschiedene besondere mögliche Aufgaben, in eine und dieselbe Rechnungsform zu vereinigen. Wollte man z. B. die letztere der obigen Aufgaben als diejenige ansehen, welche so allgemein aufgefaßt werden soll, daß sie auch die vorletzte in sich schließe, so müßte man nur, im Falle b kleiner als a seyn sollte, unter der Rechnungsform b—a, etwas denken, von dem es einerley ist, ob man es zu a addirt, oder ob man die umgekehrte Differenz a—b, welche nun allemal möglich ist, von der Zahl a subtrahirt.

Diese Betrachtungen stehen jedoch hier vereinzelt und berechtigen uns keinesweges, darauf irgend etwas allgemeines zu gründen.

Zweyte Abtheilung.

Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Gesetze der Zahlen-Verbindungen der ersten Art.

---

§. 20. Lehrsatz und Erklärung.

In einem Ausdruck, welcher bloß durch Addition allein aus mehreren andern Ausdrücken entstanden ist, können wir, wenn es uns bloß um gleichbedeutende Ausdrücke zu thun ist, alle, die verschiedene Folge dieser Additionen bestimmende Klammern weglassen, auch die einzelnen zu addirenden Ausdrücke in beliebiger Ordnung schreiben.

Z. B. statt $(a+b)+[(c+d)+(e+f)]$

oder statt $[a+(b+c)]+[(d+e)+f]$

oder statt $[a+(b+[c+(d+e)])]+f$

oder statt $[([(a+b)+c]+d)+e]+f$

u. s. w. f.

kann man bloß schreiben

$$a+b+c+d+e+f$$

oder auch $b+f+a+e+d+c$; oder ꝛc. ꝛc.;

und man nennt einen solchen Ausdruck „eine Summe mehrer Summanden."

Denn nach (§. 13. Nr. 1.) kann man in einer Summe von 3 Summanden, die Addition in beliebiger Ordnung verrichten, so daß

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)=(a+c)+b=$$ ꝛc.

ist. Kommt nun noch ein 4ter Summand d hinzu, so kann man ihn nach demselben (§. 13. Nr. 1.) zu jedem beliebigen, der in $a+b+c$ beliebig gedachten beyden Summanden addiren, so daß man erhält

$(a+b)+(c+d)$ oder $[(a+b)+d]+c$ oder $(a+d)+(b+c)$ oder

$a+[(b+c)+d]$ oder $(b+c)+(a+d)$ oder $[(b+c)+d]+a$ oder

u. s. w. f.; also daß d als Summand und aus demselben Grunde dann auch a, b, c, jedwede mögliche Stellung einnehmen können. — Kommt nun noch eine fünfte Zahl e durch Addition hinzu, so kann, weil die aus a, b, c, d gebildete Summe sich immer wieder als eine Summe von zwey Summanden denken läßt, in welcher der eine Summand beliebig bald a, bald b, c oder d, bald $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$, u. s. w. f. ist, nach demselben (§. 13. Nr. 1.) dieser 5te Summand e, und sonach auch die übrigen a, b, c oder d, jede mögliche Stellung einnehmen. — Es erhellet aber aus dem Gang dieses Beweises, daß bey beliebig viel zu addirenden Zahlen, jede eine jede Stellung einnehmen kann; wenn nur zuletzt alles addirt ist, so hat man immer eine und dieselbe Zahl.

Uebrigens war dieser Beweis viel kürzer dadurch zu führen, daß man bloß darauf aufmerksam machte, wie das Endresultat doch allemal die Zahl vorstellen werde, welche so viel Einheiten hat, als alle die einzelnen addirten Zahlen zusammengenommen haben. — Der hier vorstehende Beweis ist nur des (§. 54.) wegen gegeben worden.

Anmerkung. Es versteht sich dabey, daß a, b, c, d, e und f zum Theil, oder alle, selbst wieder Differenzen seyn können, einfachere

oder zusammengesetztere, welche jedoch dann in Klammern eingeschlossen werden müssen, wenn sie in obigen Ausdrücken statt a, b, c, d, e oder f gesetzt werden, weil nur diejenigen Klammern überflüssig sind, welche die Ordnung der Additionen andeuten. So z. B. können wir

statt $[(a-b)+c]+[d+(e-f)]$
setzen $(a-b)+c+d+(e-f)$;

statt $\big([a+(b+c)]+(d-e)\big)+(f-g)$
setzen $a+b+c+(d-e)+(f-g)$;

und statt $\big([a-(b+c)]+[(d+e)-f]\big)+g$
setzen $[a-(b+c)]+[(d+e)-f]+g$;

aber keine der übrigen Klammern weglassen, ohne Gefahr zu laufen, die Bedeutung des Ausdrucks zu ändern oder zweifelhaft zu machen.

§. 21. Willkührlicher Satz und Erklärung.

So oft mehre Ausdrücke a, b, c, d, ꝛc. ꝛc. durch Addition und Subtraction in keiner andern Ordnung verbunden sind, als wie solche ohnedies bey dem Lesen von der Linken zur Rechten auf einander folgen, so oft läßt man die, gerade diese Ordnung der Verbindungen anzeigenden Klammern weg. — Umgekehrt also: so oft ein aus mehr als zwey andern Ausdrücken zusammengesetzter Ausdruck nicht die nöthigen, seine Zusammensetzung genau bestimmenden Klammern hat, so oft wird vorausgesetzt, daß die einzelnen Ausdrücke genau in der Ordnung mit einander verbunden sind, in welcher sie bey dem Ablesen von der Linken zur Rechten auf einander folgen. — In einem so geschriebenen Ausdruck, nennt man die einzelnen Theile, welche, ohne daß solches durch Klammern näher angedeutet wäre, mit einander verbunden worden sind, die Glieder des Ausdrucks.

Beyspiele. Es steht also

$a-b-c+d-e$ statt $\big([(a-b)-c]+d\big)-e$,
$a+b-c-d+e$ statt $\big([(a+b)-c]-d\big)+e$,
$a-b-c$ statt $(a-b)-c$,
$a-b+c$ statt $(a-b)+c$,
$a+b-c$ statt $(a+b)-c$;
u. s. w. f.

Anmerkung. Die Ausdrücke a, b, c, d, ꝛc. ꝛc. können selbst wieder Summen oder Differenzen vorstellen. Diese letztern, wenn sie statt der a, b, c, d, ꝛc. gesetzt werden, müssen aber in Klammern eingeschlossen bleiben, wenn der ganze Ausdruck nicht zwey-, oder mehr-deutig werden soll.

Beyspiele. So steht die Bedeutung der Ausdrücke

1) $a-(b+c)+(c-d)-f-g-h$

2) $a+b-(c-d)-(g-h+k)+l$ u. dgl.

fest. In dem Ausdruck (1.) sind a, b+c, c—d, f, g, h; in dem andern dagegen sind a, b, c—d, g—h+k, l die (durch Addition und Subtraktion mit einander verbundenen) Glieder des Ausdrucks. — Dieselben Ausdrücke (1. und 2.) würden aber ihre Bedeutung ändern, wenn man in ihnen noch die eine oder die andere der Klammern weglassen wollte, wenn man z. B. statt des erstern Ausdrucks, setzen wollte

$$a-b+c+c-d-f-g-h;$$

oder statt des andern setzte

$$a+b-c-d-g-h+k+l.$$

Keine dieser letztern Weglassungen darf also statt finden.

§. 22. Zusatz.

Die Sätze der (§. §. 12 und 13.) können nun auch so geschrieben werden, ohne dadurch geändert zu seyn:

I. $a-b+b=a;$

II. $a+b-b=a;$

III. $a-(a-b)=b;$

1) $a+b+c=a+c+b=a+(b+c)=b+c+a;$

2) $a+b-c=a-c+b=a+(b-c)=b-c+a;$

3) $a-b+c=a+c-b=a-(b+c);$

4) $a-b-c=a-c-b=a-(b+c);$

5) $a+(b+c)=a+b+c=a+c+b;$

6) $a-(b+c)=a-b-c=a-c-b;$

7) $a+(b-c)=a+b-c=a-c+b;$

8) $a-(b-c)=a-b+c=a+c-b;$

9) $a+b=a+c+(b-c)=a-c+(b+c)=a+c-(c-b);$

10) $a-b=a+c-(b+c)=a-c-(b-c)=a-c+(c-b);$

wo jedoch von den noch gebliebenen Klammern keine weggelassen werden darf, ohne daß der Ausdruck selber Gefahr liefe, auch hinsichtlich seiner Bedeutung sich zu ändern.

§. 23. Zusatz.

Ein nach der Regel des (§. 21.) geschriebener Ausdruck, ist entweder eine Summe oder eine Differenz (und nie beydes zugleich); und zwar hängt dies von dem (+) oder (—) Zeichen ab, durch welches das letzte Glied zur Rechten mit dem ganzen zur Linken stehenden Ausdrucke in Verbindung getreten ist.

Beyspiele. So steht a—b+c statt (a—b)+c, ist also eine Summe. Dagegen steht a+b—c statt (a+b)—c und ist demnach eine Differenz.

Eben so ist a—b+c—d+e eine Summe, dagegen a—b+c—d—e eine Differenz. Der Theil-Ausdruck a—b+c—d ist im erstern Fall der erste Summand, im andern Falle dagegen der Minuend. — Betrachtet man diesen Theil-Ausdruck a—b+c—d als einen ganzen für sich, so ist er wieder eine Differenz, von welcher a—b+c der Minuend ist. — Dieser Minuend a—b+c, als ein ganzer Ausdruck für sich betrachtet, ist nun wieder eine Summe, und der erste Summand von ihr, nämlich a—b ist, an sich betrachtet, wiederum eine Differenz.

§. 24. Lehrsatz.

In jedem nach der Regel des (§. 21.) ohne Klammern geschriebenen Ausdruck, können, mit Ausnahme des ersten Gliedes, zwey beliebige der auf einander folgenden Glieder mit einander vertauscht werden, (wenn nur die Glieder mit dem zur Linken vorhergehenden Ausdruck, mittelst desselben (+) oder (—) Zeichen in Verbindung treten,) ohne daß die Bedeutung der Ausdrücke dadurch geändert würde; d. h. der neue Ausdruck ist von dem alten der Form nach zwar verschieden, aber ihm noch gleich (§. 8.).

Beweis. Nach (§. 13. Nr. 1—4.) ist

$$A+B+C=A+C+B$$
$$A+B-C=A-C+B$$
$$A-B+C=A+C-B$$
$$A-B-C=A-C-B.$$

Da man sich nun unter A jeden zusammengesetzten Ausdruck z. B. a—b—c+d bereits vorstellen kann, so erhellet die Richtigkeit unseres Lehrsatzes aus vorstehenden Gleichungen, in allen möglichen Fällen, für die zwey letzten (hier durch B und C) vorgestellten Glieder irgend eines solchen zusammengesetzten Ausdrucks.

Wenn aber z. B.

$$A-B+C=A+C-B$$

ist, so ist auch, wenn man auf beyden Seiten dieser Gleichung dasselbe vornimmt, z. B.

$$A-B+C-f+g+h=A+C-B-f+g+h;$$

also ist der Satz auch als für zwey beliebige mittlere Glieder gültig.

Anmerkung. Der Kürze wegen ist zu vorstehendem Beweise nur ein Beyspiel gewählt, weil in die Augen fällt, wie dasselbe für alle Fälle gelten muß.

§. 25. Zusatz.

In einem nach der Regel des (§. 21.) ohne Klammern geschriebenen Ausdruck kann man, ausgenommen das erste Glied, alle übrigen Glieder, mit Beybehaltung des, einem jeden vorstehenden (+) oder (—) Zeichen, in völlig beliebiger Ordnung folgen lassen. Immer hat man zwar der Form nach verschiedene Ausdrücke, die aber alle einander gleich sind, d. h. in der Bedeutung nicht verschieden sind.

Beweis. Denn da man je zwey Glieder vertauschen kann, so kann man jedes Glied von hinten vor, und von vorne nach hinten rücken lassen, in jede beliebige Stelle; und während dieses Glied eine beliebige Stelle hat, kann man wieder jedes andere Glied durch die nach (§. 24.) erlaubte Vertauschung in jede Stelle rücken lassen. Also kann jedes Glied, von dem andern unabhängig, jedwede beliebige Stelle einnehmen.

Beyspiele. Es ist also

$$\begin{aligned}
&a-b+c+d-e-f-g+h\\
=&a-b+c-e+d-f-g+h\\
=&a-b+c-e-f+d-g+h\\
=&a-b+c-e-f+d+h-g\\
=&a-b+c-e-f+h+d-g\\
=&a-b+c-e+h-f+d-g\\
=&a-b+c-e+h+d-f-g\\
=&a+c-b-e+h+d-f-g\\
=&a+c+h+d-b-e-f-g\\
=&\text{ u. s. w. f.}
\end{aligned}$$

§. 26. Zusatz.

Ein nach der Regel des (§. 21.) ohne Klammern geschriebener Ausdruck ist daher auch einer Differenz A—B gleich, wo A die Summe aller addirten, B dagegen die Summe aller subtrahirten Glieder bedeutet. Z. B.

$$a-b-c+d-e+f+g-h-k$$
$$=(a+d+f+g)-(b+c+e+h+k).$$

Beweis. Denn es ist nach (§. 25.) dieser Ausdruck

$$a-b-c+d-e+f+g-h-k$$
$$=a+d+f+g-b-c-e-h-k.$$

Nun ist es aber nach (§. 13. Nr. 4.) einerley, ob man zwey Ausdrücke nach einander oder ihre Summe auf einmal subtrahirt. Also ist obiger Ausdruck, wiederum

$$=(a+d+f+g)-(b+c)-e-h-k$$
$$=(a+d+f+g)-(b+c+e)-h-k$$
$$=(a+d+f+g)-(b+c+e+h)-k$$
$$=(a+d+f+g)-(b+c+e+h+k).$$

Und es erhellet dabey, wie dieser Beweis allgemein, d. h. für jeden einzelnen Fall geltend gemacht werden könne.

§. 27. Lehrsätze.

I. Ein nach der Regel des (§. 21.) ohne Klammern geschriebener Ausdruck B, wird zu A (während dieses A vielleicht selbst wieder ein solcher Ausdruck ist) addirt, wenn man dem ersten Gliede desselben, welches kein (+) oder (—) vor sich hat, ein + Zeichen vorsetzt, und dann alle Glieder mit ihrem vorstehenden (+) oder (—) Zeichen, in beliebiger Ordnung neben A hinsetzt. —

II. Derselbe Ausdruck B wird aber von A subtrahirt, wenn man alle Glieder von B, mit dem entgegengesetzten (+) oder (—) Zeichen versehen, in beliebiger Ordnung, neben A hinsetzt.

Beyspiele. Es ist also

1) $A+(p-q+r-s-t)=A+p-q+r-s-t$;
2) $A-(p-q+r-s-t)=A-p+q-r+s+t$.

Beweise. 1) Denn es ist nach (§. 26.):

$$p-q+r-s-t=(p+r)-(q+s+t);$$

also nach (§. 13. Nr. 7.):

$$A+(p-q+r-s-t)=A+p+r-(q+s+t),$$

und nach (§. 13. Nr. 6.) $=A+p+r-(q+s)-t$

$=A+p+r-q-s-t,$

endlich nach (§. 25.) $=A+p-q+r-s+t,$

auch $=A-q+r+t-s+p;$

u. s. w. f.

2) Eben so ist, wegen $p-q+r-s-t=(p+r)-(q+s+t)$, nach (§. 13. Nr. 8.) und nach (§. 13. Nr. 6.)

$$A-(p-q+r-s-t)=A-(p+r)+(q+s+t)$$

$$=A-p-r+q+s+t=A-p+q-r+s+t.$$

Zugleich fällt in die Augen, daß diese Beweise ganz allgemein, d. h. für jeden einzelnen Fall geltend gemacht werden können.

Anmerkung. Auch mag man folgendes noch beherzigen. — Nach (§. 10.) ist B zu A addirt, sobald man $A+B$ hingeschrieben hat; eben so B von A subtrahirt, sobald $A-B$ hingeschrieben ist. — Wird also verlangt $p-q+r-s-t$ zu A zu addiren, oder von A zu subtrahiren, so schreibe man nur hin

$$A+(p-q+r-s-t)$$

oder $A-(p-q+r-s-t)$

und man hat, genau nach (§. 10.), die Aufgaben schon gelößt. — Allein gewöhnlich will man nicht bloß diese ersten Resultate haben, sondern man will neue Ausdrücke von vorgeschriebener Form finden, welche diesen Resultaten wieder gleich sind; und in diesem praktischen Sinne sind diese Lehrsätze hier hingestellt worden, so wie schon früher die Sätze des (§. 13.) in demselben Sinne gegeben worden waren.

§. 28. Zusatz.

Daraus geht aber noch hervor, daß es allemal möglich ist, jeden durch Addition oder Subtraktion zusammengesetzten Ausdruck, wie er auch nach und nach entstanden seyn möge, und wie diese Ordnung in der Verbindung der einzelnen Ausdrücke durch Klammern ausgesprochen seyn mag, allemal in einen andern gleichbedeutenden zu verwandeln, welcher nach der Regel des (§. 21.) ganz ohne Klammern geschrieben ist.

Denn jede eingeklammerte Summe oder Differenz, sie mag einfach oder zusammengesetzt und im letztern Falle bereits nach (§. 21.) geschrieben seyn, soll entweder zu einem vorangehenden Ausdruck addirt, oder von ihm subtrahirt werden, und in beyden Fällen erhält man nach (§. 27.) einen neuen Ausdruck, welcher diese Klammern nicht mehr enthält. Also kann eine der nöthigen Klammern nach der andern weggeschafft und zuletzt ein Ausdruck ganz ohne Klammern erhalten werden.

Beyspiele. So ist z. B,

$$a-(b-c)+(f-g+h)-(p+q-r-s)$$
$$=a-b+c+f-g+h-p-q+r+s;$$

ferner

$$a-\big[b-\big(c-(d+e)\big)\big]+(f-h)-[g-(h-k)]$$
$$=a-b+c-d-e+f-h-g+h-k;$$

u. s. w. f.

Anmerkung. Alle diese Sätze gelten aber doch nur unter der Voraussetzung, daß in allen diesen Ausdrücken, keine der vorkommenden Subtraktionen unmöglich sey, d. h. daß nirgends ein Subtrahend vorhanden sey, welcher grösser wäre, als sein Minuend; weil sonst die Ausdrücke selbst bedeutungslos würden und von einerley Bedeutung nicht mehr die Rede seyn könnte.

Auf der andern Seite haben wir früher schon einigemale die Bemerkung gemacht, daß, sobald die einzelnen Ausdrücke noch ganz unbestimmt sind, man gar nicht wissen kann, welcher der größere und welcher der kleinere ist, so also, daß man auch nicht wissen kann, ob eine angezeigte Subtraktion möglich ist oder nicht.

Es ist daher nöthig zu untersuchen, ob man die Begriffe der Summe, der Differenz und der Gleichung auch noch in einem allgemeinern und in einem solchen Sinne auffassen kann und darf, daß man sich um die Zahlen-Bedeutung der einzelnen Ausdrücke nicht mehr zu bekümmern braucht.

Diese Untersuchungen führen uns aber zunächst zu folgendem

§. 29. Lehrsatz.

Wenn man das (§. 14. α, β, γ) beschriebene Ableiten der Gleichungen (welches jeden möglichen Fall in sich schließt, und welches namentlich auch die Resultate der zunächst vorhergehenden Paragraphen lieferte) beybehält ganz allgemein, ohne sich mehr um die Bedeutung der einzelnen Ausdrücke zu bekümmern, (also für die Fälle, wo alle Differenzen möglich sind, als auch für diejenigen Fälle, wo sie, zum Theil oder alle, unmöglich werden),

so

so müssen zwar, die Differenz a—b, dann auch die Summe a+b, so wie noch die Gleichung, in einem andern und allgemeinern Sinne aufgefaßt werden, als solches (§. 10.) und (§. 8.) geschehen ist, wenn die einzelnen Resultate noch einen Sinn haben sollen; aber man kann doch nie durch dieses allgemeinere Arbeiten mit bloßen Rechnungsformen zu widersprechenden Zahlenresultaten geführt werden.

Beweis. Für diejenigen Zahlen-Werthe der Buchstaben, für welche alle einzelnen Subtraktionen, und folglich nachher auch alle Additionen möglich sind, ist jede entstehende Gleichung nothwendig, im Sinne des (§. 8.), richtig. — Und für diejenigen Werthe der Buchstaben, für welche die eine oder die andere Seite einer dieser Gleichungen, oder wohl auch beyde Seiten der Gleichung, unmögliche Formen enthalten, also nicht mehr wirklich Zahlen vorstellen, findet zwar die Gleichung nicht mehr im Sinne des (§. 8.) statt, aber sie enthält deshalb auch nichts unrichtiges, d. h. nichts, was mit dem Vorhergegangenen im Widerspruch stehen könnte, eben weil man jetzt keine Zahl mehr hat, vorher aber nur Zahlen der Zahlenreihe in Betrachtung gekommen sind.

Anmerkung. Einem strengen Systeme der Zahlenlehre kommt es eigentlich zu, vorher den Begriff der, in diesem allgemeinern Sinne genommenen Gleichung hinzustellen, und dann nachzuweisen, wie mit solchen allgemeinern Gleichungen genau wie mit den (§. 8.) definirten, verfahren werden kann, und wie sie, so oft sie zu wirklichen (ganzen unbenannten) Zahlen führen, auch allemal nothwendig richtige Zahlenresultate gewähren. Dieser Weg ist in der erstern Ausgabe dieses Systems strenge verfolgt worden, und mag solcher hier in der Kürze noch angedeutet stehen.

Die allgemeine Summe a+b, ist nämlich als eine bloße Form definirt worden, an welcher nichts als die Eigenschaft betrachtet wird, daß ihre Summanden beliebig vertauscht werden können, namentlich dann, wenn der eine Summand selber wieder eine Summe ist, so daß man also die Formen (a+b)+c oder (a+c)+b mit einander verwechseln darf.

Die allgemeine Differenz a—b dagegen wurde als eine bloße Form definirt, an welcher nichts als die Eigenschaft festgehalteu wird, daß sie nämlich den Minuenden a gibt, wenn man den Subtrahenden b zu ihr addirt, so daß also (a—b)+b oder b+(a—b) mit a selbst vertauscht werden kann. — Und gleich wurden zwey solche allgemeine Ausdrücke genannt (als Definition), welche entweder solche eben als mit einander vertauschbar bezeichnete sind, oder doch in solche übergehen, so oft irgend ein dritter Ausdruck zu beyden addirt wird, und man dabey je

zwey als mit einander vertauschbar erkannte, für einander zu setzen sich nicht weigert.*) Dieser allgemeinere, für bloße Rechnungsformen passende Begriff der Gleichung, enthält den frühern (§. 8.) für einen besondern Fall gegebenen, offenbar in sich. Denn so wie z. B. a—(b—c) und (a—b)+c (welche als gleich, in diesem allgemeinern Sinne, erkannt worden sind, weil b—c zu beyden addirt, Ausdrücke hervorbrachte, welche durch erlaubte Vertauschung in einen und denselben, nämlich in a, übergegangen sind) wirkliche Zahlen (ganze unbenannte) vorstellen, also nicht unmögliche Subtraktionen enthalten, so gibt es eine dritte Zahl b—c, welche zu beyden addirt, ein und dieselbe wirkliche Zahl a hervorbringt; also müssen auch a—(b—c) und (a—b)+c eine und dieselbe wirkliche Zahl vorstellen, d. h. auch im Sinne des (§. 8.) einander gleich seyn.

Aus diesen Definitionen geht hervor, daß die Sätze (α, β und γ) des (§. 14.) für diese allgemeinern Gleichungen und für diese allgemeinern Summen und Differenzen unverändert noch statt haben, und daß also alle Lehrsätze und alle Folgerungen, wie sie im vorhergehenden für wirkliche Zahlen entwickelt worden sind, oder als möglicher Weise entwikkelbar angedeutet sich finden, demselben (§. 14.) zu folge, (in diesem allgemeinern Sinne aufgefaßt) ebenfalls unverändert statt haben, und so oft sie zu wirklichen Zahlen führen, auch allemal richtige Zahlenresultate liefern, weil die allgemeinern Gleichungen dann allemal zu gleicher Zeit solche sind, wie sie (§. 8.) definirt stehen.

Dem Verfasser ist der Vorwurf gemacht worden, daß er viel zu ängstlich an logischen Formen halte, und dabey öfters vernachlässige, das innere Seyn nnd Wesen der Erscheinungen deutlich genug hervorzuheben. Diesem Vorwurfe möglichst auszuweichen, ist in dieser neuen Ausgabe, der im Text stehende Weg betreten worden, die Gültigkeit dieser so höchst wichtigen Verallgemeinerungen nachzuweisen. Weil er aber durch diese Nachgiebigkeit von einer andern Seite her einen zweyten Vorwurf, nämlich den einer mangelnden Gründlichkeit zu befürchten hat, so sucht er diesem letztern durch diese Anmerkung vorzubeugen, überzeugt, daß nur dieser letztere Weg durchaus logisch strenge, und also allein der, vollkommene Ueberzeugung gewährende ist, während der hier im Texte befolgte Gang dieser (§.§. 29 und 30.), mehr das, unter den Formen verborgene Wesen dieser Erscheinungen in's Auge faßt.

---

*) Will man dieser Definition zu Folge, untersuchen, ob z. B. die allgemeine Summe (a—b)+c, der allgemeinen Differenz a—(b—c), in diesem allgemeinern Sinne gleich ist, so addire man b—c zu beyden. Die zweyte geht dadurch über in [a—(b—c)]+(b—c) d. h. in a. Der erstere Ausdruck dagegen geht über in [(a—b)+c]+(b—c), kann aber vertauscht werden mit (a—b)+[c+(b—c)], also auch mit (a—b)+b, und geht also ebenfalls zuletzt in a über. — Dahero sind a—(b—c) und (a—b)+c einander gleich, in diesem allgemeinern Sinne des Worts.

§. 30. Zusatz.

Untersucht man aber den Sinn, in welchem bey diesem allgemeinern Arbeiten, die Summe, die Differenz und die Gleichung genommen sind, so findet man leicht, daß jetzt die Summe a+b als eine bloß angezeigte Addition, die Differenz a—b als eine bloß angezeigte Subtraktion, also Summe und Differenz als bloße Rechnungsformen zu betrachten sind, und daß die Gleichungen bloß noch das Verhalten der beyden Operationen (der Addition und der Subtraktion) zu einander, zu erkennen geben.

Da es aber höchst wichtig ist, mit noch ganz unbestimmten Zahlen arbeiten zu können, also auch dann noch, wenn man nicht untersuchen kann, ob die einzelnen vorkommenden Subtraktionen alle möglich sind, oder ob sich unmögliche darunter befinden, so müssen wir uns freuen, daß nach (§. 29.) das Arbeiten mit den bloßen Rechnungsformen (bloß angezeigten Operationen) nie zu Widersprüchen führen kann, wenn man nur genau auf sie dieselben Gesetze anwendet, wie sie für solche gelten würden, wenn sie wirklich eine Zahl vorstellten (d. h. möglich wären); und wir werden daher von nun an die im (§. 14.) ausgesprochenen Ableitungsregeln von Gleichungen aus Gleichungen, so wie die erstern Gleichungen selber, unbedingt anwenden, ohne uns mehr um die (Zahlen-) Bedeutung der einzelnen Ausdrücke zu bekümmern.

§. 31. Zusatz.

Die Aufgabe des (§. 18.): „einen Ausdruck zu finden, welcher zu a addirt, b gibt", und welche dort nicht allgemein, sondern nur für den Fall gelößt werden konnte, daß a kleiner wie b ist, findet jetzt eine allgemeine Auflösung. Immer ist es nämlich der Ausdruck b—a, d. h. diese Rechnungsform (diese angezeigte Subtraktion), welche wir mit der Eigenschaft begabt uns denken, daß sie zu a addirt, b wieder gibt.

Anmerkung. Sind a und b Zahlen, und ist a kleiner als b, so ist zugleich eine Zahl b—a möglich, welche zu a addirt b gibt; und ist a größer als b, so kann man noch untersuchen, wie sich in diesem

Falle, das allgemeine Resultat b—a deuten läßt; und man findet leicht, daß das gefundene Resultat nun anzeigt, wie es keine Zahl gibt, welche dem Verlangten entspricht, wie aber die umgekehrte Differenz a—b nun eine Zahl ist, welche von a subtrahirt, die Zahl b wieder hervorbringt.

§. 32. Zusätze.

Nimmt man die Formeln des (§. 13. Nr. Nr. 7. und 8.), nämlich:

$$a+(b-c)=(a+b)-c=(a-c)+b$$

und

$$a-(b-c)=(a-b)+c=(a+c)-b;$$

und setzt man statt c durchaus b, so gehen sie über in:

$$a+(b-b)=(a+b)-b=(a-b)+b$$

und

$$a-(b-b)=(a-b)+b=(a+b)-b;$$

d. h. nach (§. 12. I. oder II.) in:

$$a+(b-b)=a$$

und

$$a-(b-b)=a.$$

Setzt man daher als Erklärung fest, daß man der Kürze wegen

die Differenz b—b durch das Zeichen 0,

welches (Null) ausgesprochen werden mag, bezeichnen wolle, so hat man sogleich die beyden Folgerungen

1) $a+0=a$ oder auch $0+a=a$,

2) $a-0=a$;

d. h. 0 (Null) bedeutet einen Ausdruck, welcher, er mag addirt oder subtrahirt werden, nichts ändert.

Anmerkung. Weil alles Arbeiten von nun an mit bloßen Rechnungsformen statt findet, also gerade auf die Verschiedenheit der Form Rücksicht genommen werden muß, und weil die Form b—b doch von der andern q—q verschieden seyn dürfte, so kann hier die Frage entstehen, wenn man unter 0 die bestimmte Form b—b versteht, ob man auch die andre q—q dafür setzen könne. Es ist jedoch nach (§. 13. Nr. 3.)

$$(b-b)+q=(b+q)-b=q;$$

also wenn man q auf beyden Seiten subtrahirt:

$$b-b=q-q.$$

Weil aber nach (§. 14. γ und §. 29.) zwey gleiche Ausdrücke in Gleichungen für einander gesetzt werden dürfen, so kann man also bey

dem Ableiten der Gleichungen aus einander, statt b—b oder 0, auch die Form q—q setzen, so wie umgekehrt statt der Form q—q, auch die Form b—b oder 0 gesetzt werden kann.

§. 33. Zusatz.

Wird in den Sätzen (§. 13. Nr. Nr. 5—8.), nämlich in:

$$a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b,$$
$$a-(b+c)=(a-b)-c=(a-c)-b,$$
$$a+(b-c)=(a+b)-c=(a-c)+b,$$
$$a-(b-c)=(a-b)+c=(a+c)-b,$$

durchaus 0 (Null) statt b gesetzt, so gehen sie über in folgende:

$$a+(0+c)=(a+0)+c=(a+c)+0,$$
$$a-(0+c)=(a-0)-c=(a-c)-0,$$
$$a+(0-c)=(a+0)-c=(a-c)+0,$$
$$a-(0-c)=(a-0)+c=(a+c)-0.$$

Setzt man nun als Definition fest, daß man die Summe $0+c$ bloß durch $+c$ und die Differenz $0-c$ bloß durch $-c$ bezeichnen wolle, und wendet man dabey die Sätze (§. 32. Nr. Nr. 1. 2.) von der Null an, so gehen die letztern Gleichungen noch in folgende über:

1) $a+(+c)=a+c$;
2) $a-(+c)=a-c$;
3) $a+(-c)=a-c$;
4) $a-(-c)=a+c$.

Und setzt man hier weiter 0 statt a, so verwandeln sich diese Gleichungen in:

5) $+(+c)=+c$;
6) $-(+c)=-c$;
7) $+(-c)=-c$;
8) $-(-c)=+c$.

Da ferner $+c$ statt $0+c$ steht, und nach (§. 32. Nr. 1.) $0+c=c$ ist, so ist auch

9) $+c=c$;

und man kann daher in den Gleichungen durchaus $+q$ statt q und umgekehrt q statt $+q$ setzen, was auch q seyn mag.

§. 34. Zusatz.

Ferner ergibt sich noch aus (§. 27. und §. 26.)

$$(+a)+(+b)=(0+a)+(0+b)=(0+0)+(a+b)=+(a+b)$$

d. h. 1) $(+a)+(+b)=+(a+b)$.

Eben so:

$$(-a)+(-b)=(0-a)+(0-b)=(0+0)-(a+b);$$

demnach in Verbindung mit (§. 13. Nr. 6.):

2) $(-a)+(-b)=-(a+b)=-a-b=-b-a$.

Und aus (§. 13. Nr. Nr. 7. und 8.) ergibt sich noch:

$$a-(b-c)=(a+c)-b=a+(c-b);$$

also, wenn man 0 statt a setzt:

$$-(b-c)=+(c-b)=c-b;$$

mithin aus (§. 33. Nr. 3.):

3) $(+a)+(-b)=(-b)+(+a)=a-b=-(b-a)$.

§. 35. Zusatz.

Nennt man die (§. 33.) eingeführten Zeichen von der Form $+q$ und $-q$, beziehlich additive Zahlen (additive Ausdrücke) und subtraktive Zahlen (subtraktive Ausdrücke), und q selbst das Glied derselben, so lassen sich die Regeln der (§. 33. Nr. Nr. 3., 4., oder 7., 8.) so wie der (§. 34. Nr. Nr. 1. 2.) in Worten so geben:

1) Es ist einerlei, ob man eine subtraktive Zahl $-c$ addirt, oder ihr Glied c selbst subtrahirt; d. h. $a+(-c)=a-c$.

2) Es ist einerlei, ob man eine subtraktive Zahl $-c$ subtrahirt, oder ihr Glied c selbst addirt; d. h. $a-(-c)=a+c$.

3) Wenn zwey additive oder subtraktive Zahlen $+a$ und $+b$ oder $-a$ und $-b$ oder $+a$ und $-b$, zu einander addirt werden sollen, so beobachte man die Regel:

α) Haben sie einerley (+ oder −) Zeichen, so addire man ihre Glieder und setze der Summe dasselbe (+ oder − Zeichen) vor; d. h.

$$(+a)+(+b)=+(a+b),$$
$$(-a)+(-b)=-(a+b).$$

β) Haben sie verschiedene (+ oder —) Zeichen, so subtrahire man die Glieder von einander, das erstere von dem letztern, oder das letztere vom erstern, setze aber der Differenz dasjenige (+ oder —) Zeichen vor, welches bey diesem letztern Subtrahiren, dem als Minuenden genommenen Gliede vorstand; d. h.

$$(+a)+(-b)=(-b)+(+a)=+(a-b),$$
$$\text{aber auch } =-(b-a).$$

Anmerkung. Statt der letztern Regel, die speciellere zu geben, daß man das kleinere Glied vom größern subtrahiren solle, und dem Rest des (+ oder —) Zeichen des größern geben, ist der hier nöthigen Allgemeinheit wegen, hier nicht ausreichend.

§. 36. Zusatz.

In irgend einem nach der Regel des (§. 21.) ohne Klammern geschriebenen Ausdruck, welcher mit a—b anfängt z. B

$$a-b\pm c+d-e-f-g+h,$$

kann man b statt a setzen wollen, so daß aus ihm

$$b-b\pm c+d-e-f-g+h$$
oder $$0\pm c+d-e-f-g+h$$
oder $$\pm c+d-e-f-g+h$$

hervorgeht (weil die Glieder in der Ordnung verbunden gedacht werden, wie solche bey dem Lesen auf einander folgen, so daß man zuerst $0\pm c$ bekommt, wofür dann bloß $\pm c$ gesetzt wird). — Da nun (nach §. 25.) in jedem solchen Ausdruck

$$a-b\pm c+d-e-f-g+h$$

alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, in beliebiger Ordnung geschrieben werden können, so folgt, daß in

$$b-b\pm c+d-e-f-g+h$$
d. h. in $$\pm c+d-e-f-g+h$$

alle Glieder (auch das erste $\pm c$ mitgerechnet) in beliebige Ordnung gesetzt werden können, und daß man dadurch doch lauter einander gleiche Ausdrücke erhält.

Und da in jedem solchen nach der Regel des (§. 21.) geschriebenen Ausdruck, wie z. B.

c+d—e—f+g

statt c auch 0+c also auch +c geschrieben gedacht werden kann, so kann auch jeder solche Ausdruck mit einem (+ oder —) Zeichen anfangen, wie z. B. der vorstehende so aussehen kann:

+c+d—e—f+g.

§. 37. Lehrsatz und Erklärung.

Ein nach der Regel des (§. 21.) in Verbindung mit den speciellen Betrachtungen des (§. 36.) ohne Klammern, und zugleich so geschriebener Ausdruck, daß auch dem ersten Gliede ein (+ oder —) Zeichen vorsteht, z. B.

—a+b+c—d—e—f+g,

kann allemal als eine bloße, einzig und allein im Sinne des (§. 20.) genommene Summe angesehen werden, in welcher aber alle die einzelnen Summanden lauter additive oder subtraktive Zahlen, und zwar die Glieder des Ausdrucks selbst, mit den ihnen vorstehenden (+ oder —) Zeichen sind; d. h. es ist

—a+b+c—d—e—f+g
=(—a)+(+b)+(+c)+(—d)+(—e)+(—f)+(+g).

Beweis erhellet unmittelbar aus (§. 33. Nr. Nr. 1—4.) oder (§. 35. Nr. Nr. 1. und 2.)

Einen solchen nach der Regel des (§. 21.) mit der Verallgemeinerung des (§. 36.) geschriebenen Ausdruck, nennt man deshalb nicht unpassend eine Summe, zum Unterschiede dagegen von den gemeinen Summen des (§. 20.), eine algebraische Summe.

Anmerkung. Für das praktische Arbeiten ist diese Ansicht der algebraischen Summen sehr wichtig. Wo namentlich eine gegebene algebraische Summe vereinfacht werden soll, kann man irgend zwey ihrer Glieder, mit den ihnen vorstehenden (+ oder —) Zeichen versehen, als zwey additive oder subtraktive Zahlen ansehen, welche zu einander addirt

werden müssen, und welche daher nach den Regeln des (§. 35.) allemal in eine einzige additive oder subtraktive Zahl vereinigt werden können, während letztere wiederum als Glied statt jener beyden Glieder in eine beliebige Stelle gesetzt werden kann. —

Beyspiel. So ist z. B.

$$-a+b+c-d-e=-(a+d)+b+c-e$$
$$=-a+(b-d)+c-e=-a-(d-b)+c-e=-(a+e)+c-(d-b)$$
$$=-a+(c-e)+(b-d)=-a-(e-c)+(b-d)=\text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

§. 38. Zusatz.

Die Lehrsätze des (§. 27.) gelten nun auch offenbar ohne alle weitere Beschränkung für die algebraischen Summen. Der Praxis wegen mögen sie hier noch einmal Platz finden:

I. Eine algebraische Summe wird addirt z. B. zu A, wenn man alle ihre Glieder neben A hinsetzt mit dem ihnen vorstehenden (+ oder —) Zeichen und in beliebiger Ordnung.

II. Eine algebraische Summe wird subtrahirt z. B. von A, wenn man alle ihre Glieder mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen neben A, übrigens in beliebiger Ordnung hinsetzt.

§. 39. Lehrsatz.

Jeder aus beliebigen Zahlen a, b, c, d, e, f. ꝛc. ꝛc. ꝛc. ganz beliebig durch Addition oder Subtraktion zusammengesetzte Ausdruck, mögen die einzelnen Subtraktionen möglich seyn oder nicht, und mögen diese unmöglichen Summen und Differenzen selber wieder, beliebig wie, unter sich durch Addition oder Subtraktion verbunden seyn, ist doch allemal einer wirklichen Zahl, oder der Form 0, oder der Form $-z$ gleich, wo z eine wirkliche Zahl bedeutet.

Beweis. Denn jeder solche Ausdruck läßt sich allemal nach (§. 28. und §. 26.) in eine Differenz von der Form A—B verwandeln, wo A und B Summen aus den gegebenen Zahlen bedeuten, also selber wirkliche Zahlen sind. Ist nun A größer als B, so ist A—B selber eine wirkliche Zahl. Ist aber A gleich oder kleiner als B, so ist A—B eine bloße Rechnungsform, und zwar eine solche, welche wir durch 0 (Null) bezeichnet haben, wenn A=B ist, welche dagegen nach (§. 34.) in

—(B—A) verwandelt werden kann, wenn A kleiner als B seyn sollte, wo dann B—A eine wirkliche, oben durch z vorgestellte Zahl ist.

§. 40. Zusatz.

Das allgemeinere Auffassen der Summen und der Differenzen, wie solches durch (§. 29.) bedingt worden ist, führt uns also, wenn man nur ursprünglich wirkliche Zahlen hatte, zu keinen andern neuen speciellen Formen, als zu der **0** (Null) und zu der subtraktiven Zahl —z, wo z eine wirkliche Zahl ist.

Um anzudeuten, daß in dem subtraktiven Ausdruck —z, das Glied z nicht selber mehr eine, vielleicht unmögliche, Summe oder Differenz, sondern wirklich eine Zahl ist, nennen wir diesen Ausdruck —z auch eine negative Zahl. Und der Gleichförmigkeit wegen, wollen wir dann +z eine positive Zahl nennen, so oft wir zu verstehen geben wollen, daß z nichts anders mehr seyn soll, als eine (wirkliche) Zahl.

Endlich ist $z = +z$ (nämlich $z = 0 + z$), also kann +z statt z, und z statt +z, in den Gleichungen, gesetzt werden; und in so ferne ist es wenigstens als unschädlich gerechtfertigt, wenn man zuweilen die bloße (wirkliche) Zahl z, bereits eine positive Zahl nennt.

Alle bis jetzt möglicher Weise entstandenen speciellen Formen, sind daher

die positive Zahl, die Null und die negative Zahl;

und da diese alle in der Differenz A—B enthalten sind, je nachdem A größer, gleich oder kleiner als B gedacht wird, so ist jede bis jetzt mögliche specielle Zahl-Form durch eine Differenz A—B zweyer (wirklichen) Zahlen ausgedrückt.

§. 41. Lehrsatz.

In jeder Gleichung zwischen zwey algebraischen Summen, kann man auf jeder der beyden Seiten der Gleichung beliebig viel Glieder weglassen, und solche mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen auf die andere Seite schreiben, und die neue Gleichung ist noch richtig; ja man kann die Glieder auf einer Seite alle

weglassen und 0 dafür setzen, solche aber auf die andere Seite bringen mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen versehen, und immer erhält man noch richtige Gleichungen.

Beyspiele. Z. B. aus

$$-a+b-(c-d)+e-f=-(a-b)-(c+f)+d+e,$$

folgen

$$b-(c-d)-f=-(a-b)-(c+f)+d+e+a-e$$

$$=-(a-b)-(c+f)+d+a,$$

oder $$-(c-d)=-(a-b)-(c+f)+d+a-b+f,$$

oder $$0=-(a-b)-(c+f)+d+a-b+f+(c-d),$$

oder $$(c+f)-(c-d)=-(a-b)+d+a-b+f,$$

oder $$(c+f)-(c-d)+(a-b)=d+a-b+f,$$

oder $$(c+f)-(c-d)+(a-b)-d+b-f=a,$$

oder $$(c+f)-(c-d)+(a-b)-d+b-f-a=0,$$

oder u. s. w. f.

Beweis. Denn jedes Glied z. B. (c—d) oder b, welches man auf einer Seite der Gleichung wegläßt, ist nach (§. 37.) als ein Summand von der Form —(c—d) oder +b anzusehen, welcher von dieser Seite subtrahirt worden ist. Wird derselbe aber mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen, also +(c—d) oder —b, auf die andere Seite hingeschrieben, so ist nach (§. 35.) solche auf der andern Seite ebenfalls subtrahirt. Also ist dasselbe von jeder Seite subtrahirt, und daher sind die Resultate nothwendig wieder einander gleich.

§. 42. Zusatz.

Die einfachsten Anwendungen dieses Lehrsatzes ergeben sich, wenn man ihn auf diese einfachste Gleichung

$$a-b=c-d,$$

welche eine arithmetische Zahlen-Proportion genannt wird, anwendet. — Aus der arithmetischen Proportion

$$a-b=c-d,$$

geht nämlich dann sogleich hervor

$$a = c - d + b = b + c - d,$$
$$a + d = b + c,$$
$$d = b + c - a,$$
$$a + d - c = b,$$
$$a + d - b = c,$$
$$a - c = b - d,$$
$$d - c = b - a,$$
$$d - b = c - a,$$

u. s. w. f.

Diese Gleichungen könnte man auch als eigene, aus der Bedingung

$$a - b = c - d$$

hervorgehende Lehrsätze in Worte kleiden, und solche würden dann eine „Lehre der arithmetischen Zahlen-Proportionen" ausmachen.

§. 43. Aufgabe.

Es wird ein Ausdruck gesucht, welcher die Eigenschaft hat, daß, wenn aus ihm und andern gegebenen Ausdrücken a, b, c, d, ꝛc. ꝛc. zwey neue Ausdrücke auf eine beliebige aber gegebene Weise durch Addition und Subtraktion verbunden, gebildet werden, diese letztern beyde einander gleich seyen.

Auflösung. 1) Man bezeichne den gesuchten Ausdruck vorläufig durch z, verbinde z mit a, b, c, d, ꝛc. auf die gegebene Weise, verwandle die beyden gebildeten Ausdrücke nach (§. 28.) in algebraische Summen, und setze solche einander gleich.

2) Man versetze die Glieder nach (§. 41.) von einer Seite der Gleichung auf die andere, so daß z ganz allein auf der einen Seite stehen bleibt, auf der andern Seite dagegen dieser Buchstabe z nicht zu sehen ist, so ist dieser Ausdruck auf der andern Seite der gesuchte.

Beweis ist nach (§. 16.) leicht zu führen.

Beyspiel 1. Einen Ausdruck zu suchen, welcher, wenn er von b subtrahirt, und, was herauskommt, zu a addirt wird, c gibt.

Es ist $a+(b-z)=c$,
$a+b-z=c$,
$a+b=c+z$,
$a+b-c=z$;
und $a+b-c$ ist der gesuchte Ausdruck.

Beyspiel 2. Es wird ein Ausdruck z gesucht, welcher die Eigenschaft hat, daß, wenn man ihn von c subtrahirt, was herauskommt von b subtrahirt, und was nun herauskommt noch von a subtrahirt, das Resultat der Ausdruck d wird.

Hier ist $a-[b-(c-z)]=d$,
also $a-(b-c+z)=d$,
$a-b+c-z=d$,
$a-b+c=d+z$,
$a-b+c-d=z$;
und $a-b+c-d$ ist der gesuchte Ausdruck.

Beyspiel 3. Es wird der Ausdruck gesucht, der die Eigenschaft hat, daß wenn man ihn zu q addirt, die Summe von p subtrahirt, was heraus kommt zu n addirt, das Ganze von m subtrahirt, und was sich nun ergibt nochmals zu l addirt, dann s sich ergibt.

Hier ist
$$l+\left(m-\left[n+\left(p-(q+z)\right)\right]\right)=s,$$
also $l+m-n-p+q+z=s$,
und $z=s-l-m+n+p-q$,
so daß $s-l-m+n+p-q$ oder $(s+n+p)-(l+m+q)$ als der gesuchte Ausdruck erscheint.

Anmerkung 1. Würde der Ausdruck gesucht, welcher, wenn er von a und b zugleich subtrahirt wird, und wenn zu der letztern Differenz noch c addirt wird, dann die erstere Differenz $a-z$ der letztern Summe $(b-z)+c$ gleich macht, so hätte man

$$a-z=b-z+c,$$
d. h. $z-z=b+c-a$,
oder $0=b+c-a$;
und der Ausdruck z bliebe unbestimmt. Bedeuten nun a und b und c solche Ausdrücke (z. B. wenn a die Summe $b+c$ selbst vorstellt) daß $b+c-a=0$ eine richtige Gleichung ist, so kann für z jeder beliebige Ausdruck gesetzt werden, und immer ist der Bedingung der Aufgabe genügt. Ist aber nicht wirklich $b+c=a$, so zeigt dieser Widerspruch in

dem Resultat an, daß nun ein Ausdruck, wie er gesucht werde, gar nicht existirt.

Anmerkung 2. Man kann auch folgende Aufgabe stellen. Es wird der Ausdruck gesucht, welcher die Eigenschaft hat, daß wenn man ihn sowohl von a als auch von b subtrahirt, und die letztere Differenz (b—z) wiederum von c subtrahirt, dann die erstere Differenz a—z, dem letztern Resultat c—(b—z) gleich werde.

Hier hat man

$$a-z=c-(b-z)=c-b+z,$$

also

$$a+b-c=z+z.$$

Hieraus folgt nun zwar, was der gesuchte Ausdruck z gibt, wenn er zu sich selber addirt wird, aber nicht, wie er selber beschaffen seyn werde; und es läßt sich muthmaßen, daß vielleicht ein solcher Ausdruck z existirt, aber nicht bloß aus a, b und c durch Addition und Subtraktion zusammengesetzt. Diese Aufgabe kann daher in der Folge vielleicht noch möglich, hier aber noch nicht gelöset werden.

Zu gleicher Zeit mag man nicht übersehen daß man auch Beyspiele wählen kann, wo zuletzt der zu bestimmende unbekannte Ausdruck in Gleichungen von nachstehender Form vorkommt:

$$p=z+z+z,$$

oder $$p=z+z+z+z,$$

oder $$p=z+z+z+z+z,$$

u. s. w. f.

welche alle noch einer künftigen Auflösung entgegensehen.

Nacherinnerung zu diesem Kapitel.

Das in diesem Kapitel vorgetragene konnte viel einfacher und gedrängter gegeben werden.

So wie nämlich die Begriffe der Summe a+b und der Differenz a—b des (§. 10.) hingestellt, und die Sätze der (§. §. 12 und 13.) entwickelt waren, welche lehren, wie Summen und Differenzen und einfache Zahlen zu einander addirt und von einander subtrahirt werden, und so wie der (§. 14.) aufmerksam gemacht hatte, wie allein durch Anwendung der Sätze (§. 14. α, β, γ) alle Gleichungen dieses Kapitels, d. h. alle in demselben ausgesprochenen Gesetze des Addirens und Subtrahirens, hervorgehen, so konnte sogleich statt des nächsten (§. 15.) der (§. 29.) kommen, durch welchen außer Zweifel gesetzt wird, daß das Arbeiten mit den bloßen Rechnungsformen, nach denselben Regeln des (§. 14.), indem man sie nämlich so behandelt, wie wenn sie alle möglich wären, nicht zu Widersprüchen führen könne. — Hatte man die all-

gemeine Form a—b, und wußte man damit (nach §. 14.) zu arbeiten, so führte man augenblicklich die abkürzenden Zeichen ein, nämlich

0 und +b und —b

statt q—q, (q—q)+b, (q—q)—b;

machte bloß darauf aufmerksam, daß, was für alle Summen uud Differenzen gilt, auch für die durch +b und durch 0 und —b vorgestellten Summen und Differenzen gelten müsse; und es folgte dann von selbst, wie man 0 und —b und auch +b addirt oder subtrahirt, so daß jeder Anfänger als Anwendung seiner Sätze der (§. §. 12. und 13.) sogleich selber finden muß:

$$a+0=a, \qquad a-0=a,$$
$$a+(-b)=a-b, \qquad a-(-b)=a+b,$$
$$(+a)+(-b)=a-b=-(b-a),$$
$$(-a)+(-b)=-(a+b);$$

u. s. w. f.

Hernach erst konnte man die Klammern-Regel des (§. 21.) aufstellen, aber schon als erstes Glied des Ausdrucks, +a oder —a schreiben, weil diese Begriffe schon feststanden. Unmittelbar darauf mußte der Lehrsatz des (§. 37.) folgen, nach welchem jede algebraische Summe als eine gemeine Summe angesehen werden kann, deren Summanden aber alle von der Form +q oder —q sind; und somit galt für die algebraischen Summen alles, was für die gemeinen Summen in den Lehrsätzen des (§. 13.) bereits ausgesprochen war, also namentlich

1) das beliebige Anordnen der einzelnen mit ihrem (+ oder —) Zeichen versehenen Glieder,
2) das Addiren und das Subtrahiren einer algebraischen Summe; (indem man die Sätze des (§. 13. Nr. Nr. 5 und 6.) mit denen in Verbindung brachte, welche Ausdrücke von der Form +q oder —q zu addiren oder zu subtrahiren lehren).

Es ist aber dasmal absichtlich der hier im Kapitel selbst befolgte Weg gewählt worden, um dem Vortrage mehr Anschaulichkeit zu geben, und ihn dadurch zugänglicher zu machen.

Anhang zum ersten Kapitel.

Erste Anwendung der (hier entwickelten) Lehren der Zahlenlehre auf die allgemeine Größenlehre.

1. Erklärung.

Eine Größe (Quantum) ist jedes Ding, welches eine benannte Zahl ist, oder noch werden kann. — Benannte Zahl, nennen wir diejenige Zahl, bey welcher wir uns eine völlig bestimmte und genannte Einheit denken. — Eine Größe A wird gemessen, wenn man sie als eine benannte Zahl aE ausdrückt, oder doch die Elemente findet, aus denen diese benannte Zahl aE leicht gebildet werden kann. Die Größe A, wenn sie als benannte Zahl aE ausgedrückt ist, heißt dann auch noch Größe (Quantität), die unbenannte Zahl a heißt das Maaß der Größe A, die Größe E dagegen das Gemäß, auch die Einheit.

2. Erklärung.

Die allgemeine Lehre der benannten Zahlen heißt allgemeine Größenlehre.

3. Erklärung.

Zwey Größen A und B sind zu einander addirt, wenn man sich eine dritte durch A+B vorgestellte Größe, durch Zusam-

sammenfügung dieser beyden hervorgebracht denkt. Eine Größe B wird von einer andern A subtrahirt, wenn man sich die neue durch A—B vorzustellende Größe denkt, welche übrig bleibt, wenn B von A hinweggenommen wird, oder welche zu B addirt (hinzugefügt) werden muß, wenn A herauskommen soll. Des (=) Zeichens bedient man sich, wenn eine und dieselbe benannte Zahl (Größe), durch zwey oder mehr verschiedene Formen ausgedrückt wird.

4. Lehrsatz.

Es folgt sogleich, wenn A und B in benannten Zahlen aE und bE ausgedrückt sind, welche einerley Benennung E haben,

$$1)\ aE + bE = (a + b)E,$$

$$2)\ aE - bE = (a - b)E;$$

d. h. zwey (ganze) benannte Zahlen, die einerley Benennung E haben, werden zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, wenn man die unbenannten Zahlen a und b addirt oder subtrahirt und den Resultaten dieselbe Benennung E gibt.

5. Erklärung.

Läßt man die Gleichung

$$aE - bE = (a - b)E$$

als Definition der negativen benannten Zahl gelten, wenn a kleiner als b und $a - b = -c$ ist, so wird (—c)E die Größe ausdrücken, welche zu bE hinzugefügt, die erstere aE wieder gibt.

6. Zusatz.

Daraus folgerte auch, daß (b—b)E d. h. 0E die Größe bedeutete, welche zu bE hinzugefügt, dieselbe Größe bE unverändert wieder gibt. Weil aber Nichts diese Eigenschaft hat, so würde die 0 (Null), als benannte Zahl gedacht, Nichts vorstellen.

Da ferner, wenn a—b=—c, auch a+c=b und b—c=a ist, also auch aE+cE=bE und bE—cE=aE, so würde cE die Größe ausdrücken, welche von bE hinweggenommen, aE gibt.

Während also cE die Größe ausdrückt, welche von bE hinweggenommen, aE gibt; würde (—c)E die Größe ausdrücken, die zu bE hinzugefügt, aE gibt. Es würden also cE und (—c)E Größen ausdrücken, welche dergestalt in entgegengesetzten Beziehungen ständen, daß das Hinwegnehmen der einen, zugleich ein Hinzufügen der andern wäre.

In der Natur ist allenthalben ein Gegensatz offen dargelegt, z. B. Steigen und Fallen, Vorwärts und Rückwärts, Schulden und Vermögen, u. dgl. Und man sieht leicht, wie c im Vermögen habende Thaler, von b Thalern Vermögen hinweggenommen, so viel übrig lassen, wie c schuldige Thaler, welche bey einer Person zu b im Vermögen habenden Thalern hinzugefügt werden. Also würde (—c) Rthlr. Vermögen gleichbedeutend seyn mit c Rthlr. Schulden; eben so (—c) Fuß Steigen, gleichbedeutend mit c Fuß Fallen, u. s. w. f.

Es entstünde aber dann die Frage, ob noch immer

$$aE+bE=(a+b)E \quad \text{und} \quad aE-bE=(a-b)E$$

seyn werde, auch wenn a und b beliebige positive oder negative (ganze) Zahlen sind. Untersuchte man dies in den 4 möglichen Fällen, nämlich wenn a und b zugleich positiv, oder zugleich negativ sind, oder a positiv und b negativ, oder a negativ und b positiv ist, so erhielte man für diese Frage eine bejahende Antwort. Namentlich erhielte man dann auch

$$aE+(-a)E = 0E$$

d. h. die negative benannte Zahl (—a)E zu der benannten Zahl aE hinzugefügt, würde Nichts zum Resultat geben. Gleiche, aber in entgegengesetzter Beziehung genommene Größen zusammengefügt, heben sich also gegenseitig auf.

7. Zusatz.

Wollte man daher den Begriff der negativen benannten Zahl nach (Nr. 5.) zulassen, so könnte man dies thun, wenn man nur nicht mehr für sie gelten ließe, als in (Nr. 6.) eben geltend gemacht worden ist, und namentlich nicht eher Größen als entgegengesetzte ansehen wollte, bis wirklich der Gegensatz in ihnen betrachtet wird. Ferner darf man nicht übersehen, daß nur dann (—c)E das entgegengesetzte von cE ausdrückt, wenn die Einheit E erstlich als eine und dieselbe, und zweytens bereits mit einer der beyden entgegengesetzten Beziehungen versehen, gedacht wird. *)

Es ist aber viel naturgemäßer, die Formel (2. der Nr. 5.) nicht anders gelten zu lassen, als nur, wenn a größer ist als b; solche eingebildete Formen (—a)E (d. h. negative benannte Zahlen) nicht aufzunehmen; und den Gegensatz der Dinge (nicht auf die Einheit, also auch nicht auf die Größe sondern) auf den Gegensatz der Operationen des Addirens und Subtrahirens selbst zu werfen. — Nach dieser Ansicht wird die Einheit in keiner von zwey entgegengesetzten Beziehungen gedacht, sondern absolut. Nach dieser Ansicht existiren also zwar entgegengesetzte Dinge, aber nicht entgegengesetzte Größen, sondern jede Größe ist absolut; und von entgegengesetzten Größen ist also dann nie mehr die Rede.

Beyspiel. So sind 8 Rthlr. allemal ein und dieselbe Summe Geldes, ob ich sie im Vermögen habe, oder schuldig bin; aber im erstern Fall werde ich sie zu meinem Vermögen addiren, im andern Fall davon subtrahiren, wenn ich in beyden Fällen mein Vermögen genau kennen will.

---

*) So drückt (—a) Rthlr. gar nichts aus; aber (—a) Rthlr. Vermögen stellt a Rthlr. Schulden, und (—a) Rthlr. Schulden stellt wieder a Rthlr. Vermögen vor; und der einzige Vortheil, der aus der Zulassung dieser Bedeutung hervorgeht, besteht zur Zeit bloß darin, daß man bey dem Hinzufügen und Wegnehmen der Größen, entgegengesetzte Größen als auf einerlei Benennung gebrachte benannte Zahlen ansehen und behandeln kann.

8. Aufgaben.

α) Wie viel Rthlr. Vermögen muß der haben, welcher, wenn er von seinem Vermögen zuerst a Rthlr. hinwegnimmt, dann noch b Rthlr. dazu bekommt, gerade c Rthlr. besitzt.

Bezeichnet z die Zahl der Rthlr., so hat man

$$z\,\text{Rthlr.} - a\,\text{Rthlr.} + b\,\text{Rthlr.} = c\,\text{Rthlr.}$$

d. h. 1) $z - a + b = c$

und 2) $z = c + a - b = a - b + c = a + c - b$;

und a—b+c ist der Ausdruck, welcher statt z gesetzt, die Gleichung (1.) identisch macht.

Man muß jedoch nicht übersehen, daß, wenn man einen Ausdruck z gefunden hat, welcher der Gleichung (1.) genügt, dann jedesmal noch untersucht werden muß, ob er auch wirklich allen, auch den in der Gleichung nicht beachteten Bedingungen der Aufgabe selbst genügt. Es kann z. B. für gewisse Werthe von a, b, c, der gesuchte Ausdruck z eine wirkliche Zahl werden, die aber kleiner ist als a; so daß von einem Vermögen, welches kleiner ist als a Rthlr., diese größere Zahl von Thalern weggenommen werden soll, was doch nicht möglich ist; so daß also, obgleich für z eine wirkliche Zahl gefunden worden, die Aufgabe selbst, ganz streng genommen, keine Auflösung zuläßt.

Bey dem Arbeiten mit bloßen Rechnungsformen nämlich, haben wir uns erlaubt, für die unmögliche Form z—a+b, die mögliche z+b—a zu setzen, weil im Falle beyde Formen möglich sind, sie für einander gesetzt werden können. Aber eben dadurch haben wir auch in der Rechnung nicht allein unsere hier wirklich gegebene Aufgabe, sondern auch die andere, welche zu

$$z + b - a = c$$

führt, und welche, wenn beyde möglich sind, dieselbe Zahl z liefert, welche aber viel häufiger möglich ist als die gegebene, zugleich mit im Auge gehabt und behandelt. Daher ist es nöthig, das für z gefundene Resultat erst zu prüfen, ob es wirklich der

gegebenen Aufgabe in allen Dingen entspricht, oder ob es nicht vielleicht die Lösung einer andern, mit der gegebenen innigst verwandten Aufgabe enthält.

Anmerkung 1. Es können ferner a, b und c solche Zahlen bedeuten, daß a+c kleiner noch ist, als b, so daß sich für z eine negative Zahl ergibt. Keine der erwähnten Aufgaben ist nun möglich. Genügen wir aber der Gleichung.

$$z\,\text{Rthlr. V.} - a\,\text{Rthlr. V.} + b\,\text{Rthlr. V.} = c\,\text{Rthlr. V.},$$

wo Rthlr. V. den im Vermögen habenden Rthlr. ausdrückt, und finden wir $z = -[b-(a+c)] = -d$, (wenn die Zahl $b-(a+c)$ durch d vorgestellt wird), so wird man nach (Nr. 6.) unter $(-d)$ Rthlr. V., sich d Rthlr. Schulden denken dürfen, ohne gerade Widersprüche zu erwarten zu haben, wenn man nur die Aufgabe selbst jedesmal in dieser abgeänderten fingirten Beziehung nimmt.

Anmerkung 2. Einfacher, naturgemäßer und gründlicher bleibt es aber immer, in solchem Falle statt z den Ausdruck $-x$ zu setzen, (in die Gleichung $z-a+b=c$), so daß die Gleichung

$$-x-a+b=c \qquad \text{oder} \qquad b-a-x=c$$

daraus wird, weil man nun offenbar nicht

$$z=-[b-(a+c)] \qquad \text{sondern} \qquad -x=-[b-(a+c)]$$

d. h. $x=b-(a+c)$, also eine wirkliche Zahl für x bekommt. Dann kann man die Aufgabe suchen, welche zur Gleichung $b-a-x=c$ führt, und wo x die gesuchte Zahl bedeutet; und der wirkliche Werth von x wird einer solchen Fiktion nicht bedürfen. — Die Aufgabe aber, welche zur Gleichung $b-a-x=c$ führt, kann in Worte, wie folgt, gekleidet werden.

Jemand hat b Rthlr. baares Geld, bezahlt davon a Rthlr. Schulden, und fragt sich, wieviel Schulden (nämlich x Rthlr.) er noch bezahlen dürfe, wenn ihm zuletzt c Rthlr. baar übrig bleiben sollen. — Oder auch: wieviel Schulden hatte derjenige, welcher noch a Rthlr. Schulden dazu machte, und dann mit einem Vermögen von b Rthlr. die Schulden tilgte und noch c Rthlr. übrig behielt. In beyden Fällen hat man offenbar

$$b-a-x=c \qquad \text{und} \qquad x=b-(a+c).$$

β) In allen den Aufgaben des (§. 42.) kann man sich unter a, b, c ꝛc. Zahlen denken, die sich auf eine und dieselbe bestimmte Einheit (Benennung) beziehen, und alle diese Zahlen-Aufgaben gehen in Größen-Aufgaben über. Umgekehrt hat man bey allen den hier möglichen Größen-Aufgaben nichts weiter zu

thun, als die Größen in gleich-benannten Zahlen auszudrücken und die Gleichung zwischen diesen gleich-benannten Zahlen durch Weglassung der gemeinschaftlichen Benennung, auf eine Gleichung zwischen unbenannten Zahlen zurückzuführen, und das Ganze als eine, bloß zur Lehre der unbenannten Zahlen (Arithmetik, Algebra, Analysis) gehörige Untersuchung zu behandeln.

Zahlenlehre.

Zweytes Kapitel.

Von den Zahlen-Verbindungen der zweyten Art. Von den gebrochenen Zahlen oder Brüchen. Von den geometrischen Zahlen-Proportionen.

Vorerinnerung.

So wie das erste Kapitel den reinen Gegensatz betrachtete, der zwischen der Addition und Subtraktion statt findet, so soll dieses Kapitel den reinen Gegensatz auffassen zwischen der Multiplikation und Division, (also nicht zu gleicher Zeit Sätze der Addition und Subtraktion mit einmischen). Es folgen daher diese beyden Kapitel nicht auf einander, sondern sie stehen neben einander, und jedes von beyden könnte das erste seyn, wenn nicht das Multipliciren aus dem Addiren hervorginge, wenn es demnach nicht naturgemäßer wäre, da doch einmal nicht beyde Kapitel zugleich vorgetragen werden können, die hier befolgte Ordnung zu berücksichtigen. Da aber der Gegensatz zwischen der Multiplikation und Division sich eben so gestaltet, wie der früher betrachtete der Addition und Subtraktion, so ist dieses Kapitel durchaus nur eine Abschrift des vorigen geworden, nur daß hier Multipliciren, Dividiren ꝛc. ꝛc. steht, wo dort die Worte Addiren, Subtrahiren, ꝛc. ꝛc. gebraucht sind.

Erste Abtheilung.

Einfachste Gesetze der Zahlen-Verbindungen der zweyten Art.

§. 44. Erklärung.

Unter dem Produkt ab oder a·b oder a×b (ausgesprochen a mal b), welches aus dem Multiplikanden a und dem Multiplikator b besteht, denken wir uns diejenige Zahl vorgestellt, welche entsteht, wenn man so viele a nimmt, als die Zahl b Einheiten hat, und dann alle diese a zusammen addirt. — Unter dem Quotienten $\frac{a}{b}$ oder a:b (ausgesprochen a durch b), welcher aus dem Dividenden a und dem Divisor b besteht, wollen wir uns diejenige Zahl denken, welche mit b multiplicirt (im Sinne des §. 3.), die Zahl a wieder gibt. —

Man hat aber die Ausdrücke (vergl. §. 6.) a und b mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt, (d. h. a mit b multiplicirt, oder a durch b dividirt), sobald man die Zeichen

$$a \cdot b,\ a \times b,\ ab \text{ oder } \frac{a}{b},\ a:b$$

hingeschrieben hat. *) (Vergl. §. 10.)

§. 45. Zusatz.

1) Stellen a und b Zahlen vor, so bedeutet das Produkt ab oder a·b oder a×b, allemal auch eine Zahl, aber auch nur eine einzige; während der Quotient $\frac{a}{b}$ oder a:b nur dann wirklich eine Zahl vorstellen wird, wenn a ein Vielfaches von b ist (d. h. wenn a unter der Reihe der Zahlen sich befindet, die entstehen, wenn man b zu b addirt, zu dem was herauskommt wiederum b addirt, und so fortfährt, zu jedem neuen Resultat im-

*) Die Note zu (§. 10.) findet auch hier Anwendung.

mer wieder b zu addiren). Aber wenn der Quotient $\frac{a}{b}$ oder a:b eine Zahl bedeutet, so bedeutet er auch immer nur eine einzige. So oft also a·b oder $\frac{a}{b}$ wirklich Zahlen vorstellen, so oft sind sie doch nur eindeutig.

2) Wird ein Produkt oder ein Quotient als Zahlzeichen auf's neue mit einer Zahl verbunden, so muß man solche jedesmal in dem ganzen Ausdruck noch erkennen, was durch Einschließung in Klammern bewirkt werden kann. — Bedient man sich aber des erstern Divisionszeichens $\frac{a}{b}$, so hebt sich der Dividend und der Divisor, durch den Stand über oder unter dem Strich so bestimmt hervor, daß, wenn einer von ihnen wieder zusammengesetzt ist, wir die ihn einschließenden Klammern meistens weglassen können und wollen. *) Und der so geschriebene Quotient $\frac{a}{b}$ selber hebt sich so hervor, daß, wenn er wieder multiplizirt oder dividirt werden soll, und wenn man im letztern Falle das andere Divisionszeichen (:) gebraucht, das Zeichen $\frac{a}{b}$ nicht weiter durch Klammern erkennbar gemacht zu werden braucht.

3) Es ist allemal

$$a \cdot b = b \cdot a;$$

und aus diesem Grunde heißen a und b beyde ohne Unterschied Faktoren des Produkts. —

---

*) Eine Ausnahme davon macht der Fall, wo im Quotienten $\frac{a}{b}$, a oder b selber wieder ein eben so geschriebener Quotient $\frac{c}{d}$ ist, weil man dem Ausdruck $\frac{\frac{c}{d}}{b}$ nicht deutlich ansehen würde, ob c dividirt ist durch $\frac{d}{b}$, oder ob $\frac{c}{d}$ dividirt ist durch b.

Denn man denke sich eine Anzahl b Horizontalreihen, und in jeder dieser Horizontalreihen a Einheiten, wie solches in nachstehendem Schema zu sehen ist

. . . . . etc. etc.
. . . . . etc. etc.
. . . . . etc. etc.
. . . . . etc. etc.
. . . . . etc. etc.
etc. etc. etc. etc. etc. etc. etc. etc.
etc. etc. etc. etc. etc. etc.

so enthalten alle diese Reihen zusammen offenbar so viele Einheiten als die Zahl ab, d. h. die Zahl, die entsteht, wenn man die Zahl a, die in einer Horizontalreihe versinnlicht ist, b mal (so viel als Horizontalreihen sind) nimmt; während dieselbe Zahl offenbar auch durch b·a vorgestellt ist, weil man dasselbe Schema auch aus b Vertikalreihen bestehend sich denken kann, so daß in jeder Vertikalreihe sich a Einheiten befinden.

4) Zwey gleiche Ausdrücke mit zwey gleichen Ausdrücken multiplicirt, oder durch letztere dividirt, geben wieder zwey gleiche Ausdrücke.

Ist nämlich

$$a = b$$

gegeben, so ist auch

1) $a \cdot c = b \cdot c$,
2) $c \cdot a = c \cdot b$,
3) $a : c = b : c$,
4) $c : a = c : b$.

Und ist noch $c = d$ gegeben, so folgt auch

5) $a \cdot c = b \cdot d$,
6) $c \cdot a = d \cdot b$,
7) $a : c = b : d$,
8) $c : a = d : b$;

wenn nur die einzelnen Divisionen möglich sind.

Denn es geht solches unmittelbar aus (§. §. 8. 9.) hervor. (Vergl. §. 11.).

§. 46. Zusatz.

Ferner folgen aus den (§. 44.) gegebenen Definitionen augenblicklich noch nachstehende Sätze:

I. $\frac{a}{b} \cdot b = a$, oder $(a:b) \cdot b = a$;

II. $\frac{a \cdot b}{b} = a$, oder $(a \cdot b) : b = a$;

III. $a : \frac{a}{b} = b$, oder $\frac{a}{a:b} = b$; oder $a : (a:b) = b$.

Die Richtigkeit der Formel (III.) erhellet aber insbesondere, wenn man die (I.) auf beyden Seiten durch $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ dividirt (nach §. 45. Nr. 4.).

Was aber diese Formeln, in Worte gekleidet, lehren, entnehme man aus (§. 12.) indem man daselbst statt „addiren" und „subtrahiren" jetzt beziehlich „multipliciren" und „dividiren", — eben so statt der Worte „Summe" oder „Differenz" beziehlich diese andern, nämlich „Produkt" und „Quotient", statt „Summand," „Minuend" und „Subtrahend", die Worte „Faktor" „Dividend" und „Divisor" setzt. *)

§. 47. Lehrsätze.

Die Lehrsätze aber, welche lehren, wie man eine einfache Zahl und ein Produkt, oder einen Quotienten mit einander multiplicirt oder durch einander dividirt, sind folgende:

1) $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot (b \cdot c)$,
2) $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$,
3) $(a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b = a : (b : c)$,
4) $(a : b) : c = (a : c) : b = a : (b \cdot c)$,
5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$,
6) $a : (b \cdot c) = (a : b) : c = (a : c) : b$,
7) $a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b$,

---

*) Dem Anfänger wird empfohlen, sich jene wörtlichen Regeln wirklich umzuschreiben, um das gemeinschaftliche Allgemeine, und das verschiedene Specielle, desto besser zu übersehen.

8) $a:(b:c) = (a:b)\cdot c = (a\cdot c):b,$

9) $a\cdot b = (a\cdot c)\cdot(b:c) = (a:c)\cdot(b\cdot c)$
$= (a\cdot c):(c:b),$

10) $a:b = (a\cdot c):(b\cdot c) = (a:c):(b:c)$
$= (a:c)\cdot(c:b);$

welche nachstehend näher erörtert werden sollen.

Lehrsatz 1. Ein Produkt ab wird mit einer Zahl c multiplicirt, wenn man einen der Faktoren mit c multiplicirt, den andern Faktor aber unverändert läßt; d. h. es ist

$$(a\cdot b)\cdot c = (a\cdot c)\cdot b = a\cdot(b\cdot c).$$

Beweis. Denn man erhält die durch $(a\cdot b)\cdot c$ vorgestellte Zahl, wenn man sich c Horizontalreihen denkt, und in jeder dieser Horizontalreihen b solche a neben einander geschrieben, und zu einander addirt, und wenn die dadurch für diese Horizontalreihen sich ergebenden Summen, deren jede ab ist, selbst wieder addirt gedacht werden; also wenn man sich folgendes Schema denkt

$$\begin{array}{l}(a+a+a+a+\ldots.)\\ +(a+a+a+a+\ldots.)\\ +(a+a+a+a+\ldots.)\\ +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

Da es aber einerlei ist, in welcher Ordnung alle diese a zu einander addirt werden, nach (§. 20.), so erhält man dieselbe Zahl, wenn man erst die a in jeder der Verticalreihen zusammenaddirt (jede dieser Summen ist dann $a\cdot c$) und zuletzt diese aus den Vertikalreihen gebildeten Summen selber wieder addirt. Dies letztere gibt aber die durch $(a\cdot c)\cdot b$ vorgestellte Zahl. —

Also ist

$$(a\cdot b)\cdot c = (a\cdot c)\cdot b.$$

Anmerkung. Es ist dieser Beweis derselbe bereits (§. 45. Nr. 3.) gegebene; nur wo hier die beliebige Zahl a steht, steht dort bloß 1. Jener Satz ist also ein specieller Fall des jetzigen.

Lehrsatz 2. Ein Produkt ab wird durch eine Zahl c dividirt, wenn man einen der Faktoren dividirt, und den andern Faktor unverändert läßt; d. h. es ist

$$(a\cdot b):c = (a:c)\cdot b = a\cdot(b:c).$$

Lehrsatz 3. Ein Quotient a:b wird mit einer Zahl c multiplicirt, wenn man den Dividenden a multiplicirt und den Divisor b unverändert läßt; oder auch, wenn man den Divisor b durch diese Zahl c dividirt und den Dividenden a unverändert läßt; d. h. es ist

$$(a:b)\cdot c = (a\cdot c):b = a:(b:c).$$

Lehrsatz 4. Ein Quotient a:b wird durch eine Zahl c dividirt, wenn man den Dividenden a dividirt, den Divisor b dagegen unverändert läßt; oder auch, wenn man den Divisor b mit c multiplicirt und den Dividenden a unverändert läßt; d. h. es ist

$$(a:b):c = (a:c):b = a:(b\cdot c).$$

Lehrsatz 5. Eine Zahl a wird mit einem Produkt bc multiplicirt, wenn man sie zuerst mit dem einen Faktor multiplicirt; hernach, was herauskommt, noch mit dem andern; d. h. es ist

$$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c = (a\cdot c)\cdot b.$$

Lehrsatz 6. Eine Zahl a wird durch ein Produkt bc dividirt, wenn man solche Zahl a zuerst durch den einen Faktor, dann, was herauskommt, noch durch den andern dividirt; d. h. es ist

$$a:(b\cdot c) = (a:b):c = (a:c):b.$$

Lehrsatz 7. Eine Zahl a wird mit einem Quotienten b:c multiplicirt, wenn man sie zuerst mit dem Dividenden b multiplicirt, und, was herauskommt, wieder durch den Divisor c dividirt; oder auch, wenn man sie zuerst durch den Divisor c dividirt, dann, was herauskommt, noch mit dem Dividenden b multiplicirt; d. h. es ist

$$a\cdot(b:c) = (a\cdot b):c = (a:c)\cdot b.$$

Lehrsatz 8. Eine Zahl a wird durch einen Quotienten b:c dividirt, wenn man solche zuerst durch den Dividenden b

dividirt, und, was herauskommt, noch mit dem Divisor c multiplicirt; oder auch, wenn man sie zuerst mit dem Divisor c multiplicirt, und dann was herauskommt, noch durch den Dividenden b dividirt; d. h. es ist

$$a:(b:c) = (a:b)\cdot c = (a\cdot c):b.$$

Die Beweise dieser Lehrsätze, mit Ausnahme des 1sten und 5ten, stehen bereits (§. 13.), wenn man in ihnen die Additions und Subtraktions-Zeichen, in Multiplikations- und Divisions-Zeichen umwandelt, überhaupt, wo dort „Addiren" und „Subtrahiren" steht, hier durchaus „Multipliciren" und „Dividiren" dafür setzt. Der Beweis des 5ten Lehrsatzes ergibt sich aus dem des 1sten, wenn man noch in Anwendung bringt, daß $p\cdot q = q\cdot p$. —

Eben so erhellen noch die Beweise der letzten beyden Lehrsätze, nämlich:

Lehrsatz 9. Ein Produkt ab bleibt unverändert, wenn man den einen Faktor mit irgend einer Zahl c multiplicirt, den andern dagegen zu gleicher Zeit durch dieselbe Zahl c dividirt, oder auch: ein Produkt $a\cdot b$ wird in einen Quotienten verwandelt, wenn man den einen Faktor a mit einer beliebigen Zahl c multiplicirt, dann dieselbe Zahl c durch den andern Faktor b dividirt, und ersteres Produkt $a\cdot c$ zum Dividenden, letzteren Quotienten $c:b$ dagegen zum Divisor nimmt; d. h. es ist

$$a\cdot b = (a\cdot c)\cdot(b:c) = (a:c)\cdot(b\cdot c) = (a\cdot c):(c:b).$$

Lehrsatz 10. Ein Quotient $a:b$ bleibt unverändert, wenn man Dividenden und Divisor zugleich mit einer und derselben Zahl c multipiicirt, oder beyde zugleich durch c dividirt; oder auch: ein Quotient $a:b$ wird in ein Produkt verwandelt, wenn man den Dividenden a durch eine beliebige Zahl c dividirt, dann dieselbe Zahl c durch den Divisor b dividirt, und zuletzt beide Quotienten $a:c$ und $c:b$ mit einander multiplicirt; d. h. es ist

$$a:b = (a\cdot c):(b\cdot c) = (a:c):(b:c) = (a:c)\cdot(c:b).$$

Anmerkung. Auch die Anmerkungen zu (§. 13.) finden hier statt, wenn man, wo dort „Addiren" und „Subtrahiren" steht, hier „Multipliciren" und „Dividiren" dafür setzt.

§. 48. Zusatz.

Auch findet genau der (§. 14.) hier wieder statt, wenn man die schon öfter erwähnte Abänderung trifft. — Alle Gleichungen der Multiplikation und Division nämlich, wenn man diese beyden Operationen allein betrachtet, und nicht zugleich Addition und Subtraktion mit in Verbindung bringt (was erst im dritten Kapitel geschehen soll), werden abgeleitet

α) aus den Gleichungen

1) $a \cdot b = b \cdot a$,
2) $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$,
3) $(a : b) \cdot b = a$,
4) $(a \cdot b) : b = a$,
5) $a : (a : b) = b$;

von denen die beyden ersten das Grundwesen der Multiplikation, die beyden letztern dagegen die reinen Gegensätze zwischen der Multiplikation und den beyden Divisionen (§. 3.) aussprechen;

β) aus dem Satze (§. 45. Nr. 4.), daß Gleiches mit Gleichem multiplicirt, oder durch Gleiches dividirt, Gleiches wieder gibt;

γ) aus dem Satze (§. 9.), daß, wenn zwey Ausdrücke einem dritten gleich sind, solche dann auch unter sich gleich seyn müssen.

§. 49. Zusatz.

Untersucht man auf eine ähnliche Weise, wie solches (§. 15.) für die Addition und Subtraktion geschehen ist, die Anwendbarkeit der 10 Lehrsätze des (§. 47.), so finden sich leicht die Fälle, wo die Verwandlungen der als möglich gedachten links stehenden Ausdrücke in die anderen, wiederum möglich sind, d. h. nicht zu unmöglichen Divisionen führen (§. 45. Nr. 1.). — Die Anwendung dieser Verwandlungen kann daher, nach dem bis jetzt Ge-

sagten nur mit der Einschränkung statt finden, daß die neuen Ausdrücke nicht unmögliche Divisionen enthalten, d. h. nicht unmöglich sind.

§. 50. Aufgabe.

Den Ausdruck zu finden, welcher durch a dividirt, b gibt.

Auflösung. Man hat, wenn x den gesuchten Ausdruck vorstellt:

1) $x : a = b$;

also, wenn man mit a multiplicirt, nach (§. 45. Nr. 4.) und (§. 46. I.):

2) $x = a \cdot b = b \cdot a$;

und ab oder ba ist der gesuchte Ausdruck.

§. 51. Aufgabe.

Den Ausdruck zu finden, durch welchen a dividirt, b gibt.

Auflösung. Man hat, wenn x den gesuchten Ausdruck vorstellt:

1) $a : x = b$;

also, wenn man a durch diese beyden Seiten dividirt, nach (§. 45. Nr. 4.) und (§. 46. III.):

2) $x = a : b$.

§. 52. Aufgabe.

Den Ausdruck zu finden, welcher mit a multiplicirt, b gibt.

Auflösung. Wird solcher durch x vorgestellt, so hat man

1) $a \cdot x = x \cdot a = b$.

Und wenn man auf beyden Seiten durch a dividirt, so ergibt sich

2) $x = b : a$,

so daß b:a der gesuchte Ausdruck ist.

Die Beweise dieser 3 Auflösungen sind nach den (§§. 16—18) gegebenen, leicht zu führen.

§. 53. Zusatz.

Sind a und b Zahlen, so ist die Aufgabe (§. 50.) allemal möglich. Dagegen ist die Aufgabe (§. 51.) nur dann möglich, wenn

wenn a ein Vielfaches von b ist, d. h., wenn a sich unter der Reihe der Zahlen befindet, welche durch wiederholtes Addiren der Zahl b sich ergeben. Und die Aufgabe (§. 52.) ist wiederum nur möglich, wenn b ein Vielfaches von a ist.

In den Fällen, wo a und b noch ganz unbestimmte Zahlen sind, bleibt es wünschenswerth, alle diese Aufgaben unter der Zahl der möglichen zu erblicken, damit eine Auflösung statt finde, ohne daß erst die besonderen Werthe von a und b gegeben oder bekannt zu seyn brauchen. (Vergl. §. 19.).

Zweyte Abtheilung.

Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Gesetze der Zahlen-Verbindungen der zweyten Art.

---

§. 54. Lehrsatz und Erklärung.

Werden Zahlen a, b, c, d, ꝛc. ꝛc. ꝛc. bloß durch Multiplikation mit einander verbunden, so ist es, wenn bloß die Bedeutung der Ausdrücke berücksichtigt wird, völlig einerlei, in welcher Ordnung diese einzelnen Multiplikationen auf einander folgen, so daß auch die Klammern, welche diese verschiedene Folge der einzelnen Multiplikationen zu bestimmen haben, ganz wegbleiben können.

So ist z. B.

$$(a\cdot b)[(c\cdot d)\cdot e] = [(a\cdot b)\cdot c]\cdot(e\cdot d) = (c\cdot d)\cdot[a\cdot(b\cdot e)]$$
$$= \big([(a\cdot b)\cdot c]\cdot d\big)\cdot e = a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e = \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

Beweis. Der (§. 20.) gegebene Beweis darf hier nur wörtlich (mit den in die Augen fallenden Abänderungen) wiederholt werden.

§. 55. Willkührlicher Satz.

Gebraucht man bloß das eine der Divisionszeichen, und zwar das (:) Zeichen, und werden mehre Ausdrücke a, b, c, d, e, f, ꝛc. ꝛc.

nach und nach durch Multiplikation und Division in der Ordnung mit einander verbunden, in welcher solche bey dem Lesen von der Linken zur Rechten auf einander folgen, so nämlich, daß jedesmal der ganze zur Linken stehende Ausdruck mit dem nun folgenden multiplicirt oder dividirt wird, so läßt man die Klammern, welche gerade diese Verbindung genau bestimmen würden, ganz weg.

Beyspiele. Es steht also nach dieser Uebereinkunft

$$a \cdot b : c \cdot d \quad \text{statt} \quad [(a \cdot b) : c] \cdot d \quad \text{und nicht statt} \quad (a \cdot b) : (c \cdot d);$$

$$\text{und} \quad a : b \cdot c \cdot d : e \quad \text{statt} \quad [(a : b) \cdot c \cdot d] : e;$$

$$\text{und} \quad a : b : c : d \cdot e \cdot f : g \quad \text{statt} \quad \big[\big([(a : b) : c] : d\big) \cdot e \cdot f\big] : g$$

$$\text{und} \quad a : (b \cdot c) \cdot (d \cdot e) : (f \cdot g) \quad \text{statt} \quad \big([a : (b \cdot c)] \cdot (d \cdot e)\big) : (f \cdot g);$$

u. s. w. f.

Auch in einem solchen Ausdruck werden die einzelnen durch bloße Multiplikation oder Division in Verbindung getretenen Ausdrücke, Glieder genannt. (Vergl. §. 21.).

§. 56. Zusatz.

Die Sätze (§§. 46. und 47.) können nun auch bloß so geschrieben werden

$$\text{I.} \quad a : b \cdot b = a;$$
$$\text{II.} \quad a \cdot b : b = a;$$
$$\text{III.} \quad a : (a : b) = b;$$

$$1) \quad a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = a \cdot (b \cdot c);$$
$$2) \quad a \cdot b : c = a : c \cdot b = a \cdot (b : c);$$
$$3) \quad a : b \cdot c = a \cdot c : b = a : (b : c);$$
$$4) \quad a : b : c = a : c : b = a : (b \cdot c);$$
$$5) \quad a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b;$$
$$6) \quad a : (b \cdot c) = a : b : c = a : c : b;$$
$$7) \quad a \cdot (b : c) = a \cdot b : c = a : c \cdot b;$$
$$8) \quad a : (b : c) = a : b \cdot c = a \cdot c : b;$$

9) $a \cdot b = a \cdot c \cdot (b : c) = a : c \cdot (b \cdot c)$
$= a \cdot c : (c : b);$

10) $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c) = (a : c) : (b : c)$
$= (a : c) \cdot (c : b);$

wo die noch stehenden Klammern unentbehrlich sind, und nicht weggelassen werden dürfen. (Vergl. §. 22.).

§. 57. Zusatz.

Ein nach dieser Regel des (§. 55.) ohne Klammern geschriebener Ausdruck, ist entweder ein Produkt oder ein Quotient, aber nie beydes zugleich, sondern es hängt solches von dem (· oder :) Zeichen des letzten Buchstaben ab. (Vergl. §. 23.).

Beyspiele. So ist $a \cdot b : c$ ein Quotient, dagegen $a : b \cdot c$ ein Produkt; u. s. w. f.

§. 58. Lehrsatz.

In jedem nach der Regel des (§. 55.) ohne Klammern geschriebenen Ausdruck, z. B. $a : b \cdot c \cdot d : e : f : g \cdot h$, können, mit Ausnahme des ersten Gliedes, je zwey zunächst auf einander folgende Glieder beliebig mit einander vertauscht werden, wenn man nur jedem Gliede dasselbe (· oder :) Zeichen vorstehen läßt.

Beweis. Denn nach (§. 47. Nr. Nr. 1—4.) hat man

$$A \cdot B \cdot C = A \cdot C \cdot B,$$
$$A \cdot B : C = A : C \cdot B,$$
$$A : B \cdot C = A \cdot C : B,$$
$$A : B : C = A : C : B.$$

Nun kann man sich aber unter A jeden solchen Ausdruck (z. B. $a : b \cdot c$, oder $a : b \cdot c \cdot d$, oder ꝛc.) denken; also erhellet die Richtigkeit des Lehrsatzes für die letzten durch B und C vorgestellten 2 Glieder eines jeden so gegebenen Ausdrucks. — Wenn aber z. B.

$A : B : C = A : C : B$ ist,

so ist auch, wenn man auf beyden Seiten dasselbe vornimmt,

z. B. $A : B : C : f \cdot g : h = A : C : B : f \cdot g : h;$

d. h. der Satz erhellet für irgend zwey zunächst auf einander folgende Glieder. (Vergl. §. 24.).

§. 59. Zusatz.

Daher kann man in einem solchen Ausdruck auch je zwey beliebige der Glieder mit einander vertauschen, auf die kurz vorher beschriebene Weise. (Vergl. §. 25.).

Beyspiele. So ist z. B.

$$a:b\cdot c\cdot d:e:f\cdot g = a\cdot g:f:b:e\cdot d\cdot c$$
$$= a\cdot d\cdot c:f:e:b\cdot g = a\cdot d\cdot c\cdot g:b:e:f = \text{ꝛc. ꝛc.}$$

§. 60. Zusatz.

Ein nach der Regel des (§. 55.) ohne Klammern geschriebener Ausdruck ist daher auch einem Quotienten A:B gleich, wo A das Produkt aller multiplicirenden, B dagegen das Produkt aller dividirenden Glieder ist. Z. B.

$$a:b\cdot c\cdot d:e:f\cdot g = (a\cdot c\cdot d\cdot g):(b\cdot e\cdot f).$$

Beweis wird von dem (§. 26.) geführten, mit den in die Augen fallenden Umänderungen, abgeschrieben.

§. 61. Lehrsätze.

I. Ein nach (§. 55.) ohne Klammern geschriebener Ausdruck B (z. B. a:b·c·d:e:f·g), wird mit einem andern A multiplicirt, wenn man dem ersten Gliede a, welches kein (· oder :) Zeichen vor sich stehen hat, das (·) Zeichen vorsetzt, und dann alle Glieder mit den ihnen vorstehenden (· oder :) Zeichen, neben A in beliebiger Ordnung hinschreibt.

II. Durch denselben Ausdruck B wird aber in A dividirt, wenn man die Glieder alle mit dem entgegengesetzten (· oder :) Zeichen neben A hinschreibt, übrigens immer in beliebiger Ordnung. (Vergl. §. 27.).

Beyspiele. Es ist also:

1) $A\times(a:b\cdot c\cdot d:e:f\cdot g) = A\cdot a:b\cdot c\cdot d:e:f\cdot g$;

2) $A:(a:b\cdot c\cdot d:e:f\cdot g) = A:a\cdot b:c:d\cdot e\cdot f:g$.

Eben so auch, wenn man noch (§. 60.) mit zuzieht:

3) $(a:b)\times(c:d) = a:b\cdot c:d = (a\cdot c):(b\cdot d)$;

4) $(a:b):(c:d) = a:b:c\cdot d = (a\cdot d):(b\cdot c)$.

Beweise erhält man, wenn die des (§. 27.) mit den in die Augen fallenden Umänderungen abgeschrieben werden.

Anmerkung. Auch die Anmerkung zu (§. 27.) kann hier statt finden, mit der schon mehrmal erwähnten Abänderung.

§. 62. Zusatz.

Jeder aus noch so vielen Zahlen bloß durch Multiplikation und Division zusammengesetzte Ausdruck, wie auch seine Zusammensetzung vor sich gegangen und durch Klammern angedeutet seyn mag, läßt sich allemal in einen andern verwandeln, welcher nach der Regel des (§. 55.) ganz ohne Klammern geschrieben ist. (Vergl. §. 28.).

Beyspiele. So ist

$$a:(b:c)\cdot(f:g\cdot h):(p\cdot q:r:s) = a:b\cdot c\cdot f:g\cdot h:p:q\cdot r\cdot s$$
$$\text{und daher auch} = (a\cdot c\cdot f\cdot h\cdot r\cdot s):(b\cdot g\cdot p\cdot q);$$

$$\text{und } a:\big(b:[c:(d\cdot e)]\big)\cdot(f:h):[g:(h:k)]$$
$$= a:b\cdot c:d:e\cdot f:h:g\cdot h:k,$$
$$\text{daher auch} = (a\cdot c\cdot f\cdot h):(b\cdot d\cdot e\cdot h\cdot g\cdot k).$$

Der Beweis ist aus (§. 28.) mit den bekannten Umänderungen abzuschreiben.

Anmerkung. Diese und alle Sätze gelten jedoch nur, in so ferne alle Divisionen möglich sind. Um aber mit noch unbestimmten Zahlen arbeiten zu können, ist es wünschenswerth zu untersuchen, ob, wenn man diese Sätze der Form nach ganz allgemein gelten läßt, daraus Widersprüche sich ergeben können. — Diese Untersuchungen führen uns aber zunächst zu folgendem

§. 63. Lehrsatz.

Wenn man das (§. 48. α, β, γ) beschriebene Ableiten (also ohne die Addition oder die Subtraktion mit hineinzubringen) der Gleichungen ganz allgemein beybehält, ohne sich mehr um die Bedeutung der einzelnen Ausdrücke zu bekümmern (also sowohl für die Fälle, wo alle Divisionen möglich sind, als auch für diejenigen, wo die Divisionen, zum Theil oder alle, als unmöglich erscheinen), so müssen zwar, das Produkt $a\cdot b$, dann auch der

Quotient a:b, so wie noch die Gleichung, in einem andern und allgemeinern Sinne aufgefaßt werden, als solches (§. 44.) und (§. 8.) geschehen ist, wenn die einzelnen Resultate noch einen Sinn haben sollen; aber man kann doch nie durch dieses allgemeine Arbeiten mit bloßen Rechnungsformen zu widersprechenden Zahlenresultaten geführt werden.

Beweis ist aus (§. 29.) abzuschreiben, mit den schon öfter erwähnten Abänderungen.

Anmerkung. Besonders muß auch die Anmerkung zu (§. 29.) hier ihren Platz behaupten, nachdem man in ihr durchaus statt „addiren" und „subtrahiren" u. s. w., jetzt „multipliciren" und „dividiren" u. s. w. geschrieben hat; und es muß dem Leser, und vorzüglich dem Anfänger, dringend empfohlen werden, jene Beweise und Bemerkungen mit den hier angedeuteten Abänderungen hier wirklich zu wiederholen, um dadurch in den Geist und in das Wesen der hier gegebenen Ansichten immer besser einzudringen.

§. 64. Zusatz.

Untersucht man aber den Sinn, in welchem bey diesem allgemeinen Arbeiten, das Produkt, der Quotient und die Gleichung genommen sind, so findet man leicht, daß jetzt das Produkt a·b als eine bloß angezeigte Multiplikation, der Quotient a:b als eine bloß angezeigte Division, also Produkte und Quotienten als bloße Rechnungsformen zu betrachten sind, und daß diese Gleichungen bloß noch das Verhalten der beyden Operationen (der Multiplikation und der Division) zu einander, zu erkennen geben.

Wir werden daher von nun an die (§. 48.) ausgesprochenen Ableitungsregeln von Gleichungen aus Gleichungen, so wie die ersteren Gleichungen selber, unbedingt anwenden, ohne uns mehr um die (Zahlen-) Bedeutung der einzelnen Ausdrücke zu bekümmern, überzeugt, daß wir dadurch nie zu Widersprüchen geführt werden können, und daß alle einzelnen Resultate (Gleichungen) uns das Verhalten der Operationen zu erkennen geben (und eben deswegen nicht ganz bedeutungslos sind). (Vergl. §. 30.).

§. 65. Zusatz.

Die Aufgabe des (§. 52.): „einen Ausdruck zu finden, welcher mit a multiplicirt, b gibt", und welche dort nicht allgemein, sondern nur für den Fall gelößt werden konnte, daß b ein Vielfaches von a ist, findet jetzt eine allgemeine Auflösung. Immer ist es nämlich der Ausdruck b:a, d. h. diese Rechnungsform, (diese angezeigte Division), welche wir mit der Eigenschaft begabt uns denken, daß sie mit a multiplicirt, b wieder gibt. — Ist b ein Vielfaches von a, so gibt es auch immer eine Zahl b:a, welche die verlangte Eigenschaft hat. Und ist b nicht ein Vielfaches von a, so läßt sich noch immer untersuchen, in welchem Sinne (in den Anwendungen) das nun erhaltene Resultat b:a sich deuten lassen werde. (Vergl. §. 31.).

§. 66. Zusatz.

Verfährt man genau wie (§. 32.), setzt in den Lehrsätzen (§. 47. Nr. Nr. 7. und 8.) b statt c, so erhält man

$$a \cdot (b:b) = a,$$
$$a:(b:b) = a.$$

Setzt man daher als Erklärung fest, daß man den Quotienten

b:b durch das kürzere Zeichen **1**

bezeichnen wolle, so lassen sich obige Gleichungen so schreiben

1) $a \cdot 1 = a$ oder auch $1 \cdot a = a$,
2) $a:1 = a$;

und weil dies immer gelten muß, auch wenn a eine (wirkliche) Zahl ist, so folgt, daß das Zeichen **1** dasselbe seyn muß, welches nach (§. 1.) die absolute Einheit bedeutet.

Anmerkung. Auch wäre vorher noch zu untersuchen, ob $b:b = q:q$ ist, um aus der Bejahung dieser Frage folgern zu können, daß man auch $\frac{q}{q}$ statt 1, und umgekehrt auch 1 statt $\frac{q}{q}$ oder $q:q$ setzen könne. (Vergl. Anmerkung zu §. 32.).

§. 67. Zusatz.

Wenn es praktischen Vortheil gewährte, so könnte man ganz analog dem (§. 33.)

das Produkt	$1 \cdot a$	und den Quotienten	$1 : a$
kürzer durch	$\cdot a$	und	$: a$

bezeichnen, und ersteres einen multiplikativen Ausdruck oder eine multiplikative Zahl, letzteres aber einen divisiven Ausdruck oder eine divisive Zahl nennen. Dann würde man ganz genau wie (§. §. 33 und 34.), hier aber aus (§. 47.), ableiten die Formeln

$$a \cdot (\cdot c) = a \cdot c; \qquad a : (\cdot c) = a : c;$$
$$a \cdot (: c) = a : c; \qquad a : (: c) = a \cdot c;$$
$$\cdot (\cdot c) = \cdot c; \qquad : (\cdot c) = : c;$$
$$\cdot (: c) = : c; \qquad : (: c) = \cdot c;$$
$$(\cdot a) \cdot (\cdot b) = \cdot ab; \qquad (: a) \cdot (: b) = : (a \cdot b);$$
$$(\cdot a) \cdot (: b) = (: b) \cdot (\cdot a) = a : b = : (b : a).$$

§. 68. Zusatz.

Dafür lassen wir jedoch lieber die 1 stehen im Zeichen, um sie nicht hinzu denken zu müssen, und indem wir statt $1 \cdot a$ oder $\cdot a$ bloß a schreiben, gewinnen diese Formeln, wenn die dann nichts sagenden ausgelassen werden, folgendes Ansehen:

$$1)\ a \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c}; \qquad 2)\ a : \frac{1}{c} = a \cdot c;$$

$$3)\ 1 : \frac{1}{c} = c; \qquad 4)\ \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b};$$

$$5)\ a \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \cdot a = a : b = 1 : \frac{b}{a}.$$

Diese Formeln können, analog den (§. 35.), auch in Worte gekleidet werden. Wir heben hier nur diejenigen davon heraus, welche praktischen Nutzen haben, nämlich:

1) Eine Zahl a wird mit einem divisiven Ausdruck $\frac{1}{b}$ multiplicirt, wenn man a selbst durch b dividirt; d.h. es ist

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}.$$

2) Eine Zahl a wird durch einen divisiven Ausdruck $\frac{1}{b}$ dividirt, wenn man a mit b selbst multiplicirt.

§. 69. Lehrsatz.

Ein nach der Regel des (§. 55.) ohne Klammern geschriebener Ausdruck, kann allemal als ein bloßes, einzig und allein im Sinne des (§. 54.) genommenes Produkt angesehen werden, in welchem jedoch alle die einzelnen Faktoren multiplikative oder divisive Ausdrücke sind, nämlich die einzelnen Glieder mit den ihnen vorstehenden (· oder :) Zeichen, (denen wir aber noch das 1, statt es aus der Bezeichnung wegzulassen, (nach §. 68.) wirklich vorschreiben); d. h. es ist

$$a:b:c \cdot d \cdot e \cdot f:g = a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot d \cdot e \cdot f \cdot \frac{1}{g}.$$

Beweis ist ganz analog dem (§. 37.) angedeuteten, und geht unmittelbar aus (§. 68. Nr. Nr. 1. 2.) hervor.

§. 70. Lehrsatz und Erklärung.

Jeder aus beliebig viel Zahlen a, b, c, d, e, ꝛc. ꝛc. beliebig durch Multiplikation und Division zusammengesetzte Ausdruck, ist allemal entweder einer wirklichen Zahl gleich, oder $= 1$, oder einem Quotienten $A:B \left(\text{oder } \frac{A}{B} \right)$ zweyer wirklichen Zahlen, der nicht selber eine wirkliche Zahl und auch nicht 1 ist. (Vergl. §. 39.).

Beweis folgt unmittelbar aus (§. 60. oder §. 26.).

§. 71. Erklärung.

Letztere neue specielle Form $A:B$ oder $\frac{A}{B}$, wo A und B (wirkliche) Zahlen sind, aber $A:B$ oder $\frac{A}{B}$ keine (wirkliche) Zahl

ist, und auch nicht 1, mag eine gebrochene Zahl oder ein Bruch genannt werden; und dann mag A der Zähler, B dagegen der Nenner des Bruches heißen. Die (wirkliche) Zahl, im Gegensatz der gebrochenen, wird nun auch ganze Zahl genannt.

Der Bruch $\frac{A}{B}$ heißt insbesondere noch ein ächter oder eigentlicher, wenn A kleiner als B, dagegen ein unächter oder uneigentlicher, wenn A größer als B ist. (§. 2. Nr. 1.)

§. 72. Zusatz.

Alle in diesem Kapitel möglicher Weise entstandenen speciellen Formen sind daher

die ganze Zahl, die Eins und die gebrochene Zahl;

und da diese alle in dem Quotienten $\frac{A}{B}$ oder A:B zweyer (wirklichen oder) ganzen Zahlen A und B, enthalten sind, je nachdem A ein Vielfaches von B, oder A das einfache B, oder endlich A weder ein Vielfaches noch das einfache B ist, so ist jede in diesem Kapitel möglicher Weise entstandene specielle Zahlform durch einen Quotienten A:B oder $\frac{A}{B}$ zweyer (wirklichen oder) ganzen Zahlen ausgedrückt. (Vergl. §. 40.).

Anmerkung. Obgleich nach der vorliegenden Erklärung des (§. 71.) der Bruch bloß ein besonderer Fall des Quotienten ist, so geschieht es doch im Praktischen häufig, daß man allgemeine Quotienten ebenfalls Brüche nennt. Dies schadet zwar nichts; allein wir müssen doch noch besonders darauf aufmerksam machen, daß nach dem vorstehenden, der Charakter des Bruches vorzüglich darin liegt, daß sein Zähler und Nenner ganze Zahlen (also nicht etwa selber wieder gebrochene Zahlen, oder andere bloße Rechnungsformen) sind, ohne daß er selbst eine ganze Zahl wäre. *)

---

*) Dies ist die gebrochene unbenannte Zahl. Der Anhang wird zeigen, daß die gebrochene benannte Zahl dasjenige ist, was in der Rechenkunst gewöhnlich als gebrochene Zahl gegeben wird.

§. 73. Zusatz.

Die frühern Sätze von den Quotienten gelten demnach alle auch von den Brüchen, und namentlich lehren die Lehrsätze (§§. 46 und 47.), wie man Brüche und ganze Zahlen mit einander multiplicirt und dividirt, während die Sätze (§. 61. I. und II.) auch noch das Multipliciren zweyer oder mehrer Brüche mit einander und durch einander lehren, überhaupt das beliebige Verbinden ganzer und gebrochener Zahlen durch Multiplikation und Division.

Weil man aber bey den Brüchen sich lieber des zweyten Divisions-Zeichens $\frac{a}{b}$, als des erstern $a:b$ bedient, so mögen jene Formeln für den praktischen Gebrauch auch in dieser andern Gestalt hier noch Platz finden:

I. $\frac{a}{b} \cdot b = b \cdot \frac{a}{b} = a,$

II. $\frac{a \cdot b}{b} = a,$

III. $a : \frac{a}{b} = b.$

} Formeln des (§. 46.).

1) $abc = acb = a(bc),$

2) $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c},$

3) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} = a : \frac{b}{c} = \frac{a}{b:c},$

4) $\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b} = \frac{a}{bc},$

5) $a \cdot (bc) = abc = acb,$

6) $\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b},$

7) $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b,$

} Formeln des (§. 47.).

$$8)\quad a:\frac{b}{c} = \frac{a}{b}\cdot c = \frac{a\cdot c}{b},$$

$$9)\quad a\cdot b = a\,c\cdot\frac{b}{c} = \frac{a}{c}\cdot(b\,c),$$

$$10)\quad \frac{a}{b} = \frac{a\cdot c}{b\cdot c} = \frac{a:c}{b:c},$$

} Formeln des (§. 47.).

welche Art zu schreiben den Vortheil gewährt, daß sich meistens Dividend und Divisor (Zähler und Nenner), so wie der Quotient (der Bruch) selber, so hervorheben, daß man sie selten noch zu dieser Absicht in Klammern einzuschließen braucht, und dann eigentlich nur die Dividenden oder die Divisoren, wenn sie selber wieder so geschriebene Quotienten sind. *)

Anmerkung. Ein Ausdruck, wie er im (§. 55.) angegeben worden, wie z. B. $a:b:c\cdot d\cdot e:f\cdot g$, würde mittelst dieses andern Divisionszeichens so aussehen

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{c}{f}}\cdot d\cdot e\cdot g, \quad \text{oder so} \quad \frac{\frac{a:b}{c}\cdot d\cdot e}{f}\cdot g.$$

Der Satz des (§. 58.) lehrt uns, daß man in einem solchen Ausdruck, einen der Faktoren und einen der Divisoren beliebig mit einander vertauschen könne. Also kann statt vorstehender Ausdrücke auch geschrieben werden

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\cdot d\cdot e\right)}{\frac{c}{f}}\cdot g, \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{a}{b}\cdot d\cdot e}{\frac{c}{f}}\cdot g \quad \text{, oder} \quad \left[\frac{\left(\frac{a\cdot d\cdot e\cdot g}{b}\right)}{\frac{c}{f}}\right],$$

oder u. s. w. f.

*) So würde man aus

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}$$

nicht herauskennen, ob $\frac{a}{b}:c$ oder $a:\frac{b}{c}$ damit gemeint ist. Hier dürfen also die Klammern, welche den Zähler oder den Nenner kenntlich machen, nicht fehlen.

Der Satz des (§. 69.) lehrt ferner, daß man einen solchen Ausdruck auch dadurch verwandeln könne, daß man alle multiplicirenden Glieder, dann auch alle dividirenden Glieder mit einander multiplicirt, und ersteres Produkt durch letzteres dividirt. Also geht jeder der vorstehenden Ausdrücke auch noch in $\frac{adeg}{bcf}$ über, so daß, wenn a, b, c, d, e, f und g wirkliche ganze Zahlen sind, jeder solche Ausdruck entweder selbst eine ganze Zahl, oder 1, oder doch eine gebrochene Zahl werden muß.

§. 74. Zusatz.

Die Sätze des (§. 61.), welche lehren, wie man zwey solche nach (§. 55.) geschriebene Ausdrücke multiplicirt, oder dividirt, mit oder durch einander, gehen für Brüche in folgende über:

I. Brüche werden mit einander multiplicirt, wenn man alle Zähler mit einander multiplicirt, und auch alle Nenner mit einander; d. h. es ist

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} = \frac{aceg}{bdfh}.$$

II. Ein Bruch A wird durch einen andern B dividirt, wenn man den Zähler des ersten mit dem Nenner des zweyten multiplicirt, dann den Nenner des ersten mit dem Zähler des zweyten, und ersteres Produkt zum neuen Zähler, letzteres dagegen zum neuen Nenner nimmt; oder auch, wenn man letztern Bruch B umkehrt (den Nenner zum Zähler macht uud den Zähler zum Nenner) und dann den erstern A mit diesem umgekehrten zweyten multiplicirt; oder auch, indem man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividirt; d. h. es ist

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a : c}{b : d}.$$

§. 75. Lehrsatz.

In einer Gleichung zwischen zwey nach (§. 55.) ohne Klammern geschriebenen, durch Multiplikation und Division zusammengesetzten Ausdrücken, kann man von jeder Seite beliebig Glieder weglassen, wenn man sie nur mit dem entgegengesetzten (· oder :)

Zeichen auf die andere Seite schreibt. Auch kann man auf diese Weise auf der einen Seite alle Glieder weglassen, wenn man nur 1 an deren Stelle schreibt, so ist die Gleichung wieder richtig.

Beyspiele. Aus

$$a:b:c\cdot d\cdot e:f\cdot g = (a:c)\cdot(d:b):(f:g)\cdot e$$

folgt $a:f = (a:c)\cdot(d:b):(f:g)\cdot e\cdot b\cdot c:d:e:g,$

auch $a\cdot d\cdot e = (a:c)\cdot(d:b):(f:g)\cdot e\cdot b\cdot c\cdot f:g,$

auch $a\cdot d\cdot e\cdot(f:g) = (a:c)\cdot(d:b)\cdot e\cdot b\cdot c\cdot f:g,$

auch $f:g = (a:c)\cdot(d:b)\cdot e\cdot b\cdot c\cdot f:g:a:d:e,$

auch $1 = (a:c)\cdot(d:b)\cdot e\cdot b\cdot c\cdot f:g:a:d:e:(f:g);$

u. s. w. f.

Beweis ist der des (§. 41.) mit den bisher gewöhnlichen Abänderungen.

§. 76. Zusatz.

Ein oft vorkommender Fall ist der einfachste unter allen, wo nämlich aus der Gleichung

1) $a:b = c:d$

abgeleitet wird, nach vorstehendem Lehrsatze,

2) $a = c:d\cdot b = b\cdot c:d;$

3) $a\cdot d = b\cdot c;$

4) $a\cdot d:b = c;$

5) $a\cdot d:c = b;$

6) $d = b\cdot c:a;$

7) $a:c = b:d;$

8) $d:b = c:a;$

9) $d:c = b:a;$

u. s. w. f.;

so daß alle folgenden Gleichungen richtig seyn werden, so oft a, b, c und d solche Ausdrücke vorstellen, für welche die 1te (Nr. 1.) richtig ist.

Umgekehrt: wenn irgend eine dieser Gleichungen richtig ist, so sind sie alle richtig.

§. 77. Erklärung und wörtliche Regeln.

Eine solche Gleichung, wie $a:b = c:d$, nennt man eine geometrische Zahlen-Proportion.

Die abgeleiteten Gleichungen gibt man mit Worten auch so, nämlich die (3.):

„In einer geometr. Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der mittlern."

Die (2. 4. 5 und 6.) so:

„In einer (geometr.) Proportion

$$a:b = c:d$$

wird jedes $\left\{\begin{matrix}\text{äußere}\\\text{mittlere}\end{matrix}\right\}$ Glied $\left\{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ oder $\left.\begin{matrix}d\\c\end{matrix}\right\}$ gefunden,

wenn man die $\left\{\begin{matrix}\text{mittlern}\\\text{äußern}\end{matrix}\right\}$ Glieder $\left\{\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.$ und $\left.\begin{matrix}c\\d\end{matrix}\right\}$ mit einander multiplicirt und, was herauskommt, durch das andere $\left\{\begin{matrix}\text{äußere}\\\text{mittlere}\end{matrix}\right\}$ Glied $\left\{\begin{matrix}d\\c\end{matrix}\right.$ oder $\left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}$ dividirt."

Die (7. 8 und 9 ꝛc.) so:

„Aus einer gegebenen (geometr.) Proportion

$$a:b = c:d$$

erhält man immer wieder eine richtige Proportion, wenn man die Glieder beliebig doch so versetzt, daß die beyden äußern Glieder immer wieder äußere bleiben, oder alle beyde zugleich mittlere Glieder werden."

Und wenn aus der Gleichung (3.)

$$a \cdot d = b \cdot c$$

wiederum abgeleitet wird, nach demselben Lehrsatz (§. 75.),

$$a:b = c:d$$
$$\text{oder} \quad a:c = b:d$$
$$\text{oder} \quad c:a = d:b$$
$$\text{oder ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

so gibt man dies, mit Worten, so:

„Eine Gleichung zwischen zwey Produkten wird in eine Proportion umgewandelt, wenn man die zwey Faktoren des einen Produkts zu {äußern / mittlern} Glieder nimmt, die beyden Faktoren des andern Produkts dagegen als {mittlere / äußere} Glieder hinschreibt."

§. 78. Zusatz.

Sind mehre Proportionen gegeben, z. B.

$$a:b = c:d$$
$$e:f = g:h$$
$$k:l = m:n$$
u. s. w. f.

so erhält man immer wieder richtige Proportionen, wenn man die unter einander stehenden (die gleichnamigen) Glieder mit einander multiplicirt oder dividirt, d. h. es ist dann noch

$$(a \cdot e):(b \cdot f) = (c \cdot g):(d \cdot h),$$

und $$\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h},$$

und $$(a \cdot e \cdot k):(b \cdot f \cdot l) = (c \cdot g \cdot m):(d \cdot h \cdot n);$$

u. s. w. f.

Es erhellet dieses augenblicklich aus (§. 45. Nr. 4.) in Verbindung mit (§. 72.).

§. 79. Aufgabe.

Es wird ein Ausdruck gesucht, welcher die Eigenschaft hat, daß, wenn man aus ihm und mehren gegebenen Ausdrücken a, b, c, d, ꝛc. zwey neue Ausdrücke auf eine beliebige aber gegebene Weise durch Multiplikation und Division zusammensetzt, diese Letztern einander gleich seyen.

Auflösung. 1) Man lasse z den gesuchten Ausdruck vorstellen, so wird die gegebene Verbindung von a, b, c, d ꝛc. und z

auf

auf die Form $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{D}$ gebracht werden können (nach §. §. 62. und 60.), so daß A und B und C und D Produkte sind aus diesen einzelnen Ausdrücken; und dann muß also

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

eine richtige Gleichung seyn.

2) Man schaffe von den Faktoren der Nenner B und D so viele auf die andere Seite in die Zähler, und von den Faktoren der Zähler A und C so viele auf die andere Seite in den Nenner (nach §. 75.), bis eine Gleichung entsteht, welche das gesuchte z ganz allein auf der einen Seite enthält. Der Ausdruck auf der andern Seite ist dann der verlangte.

Beyspiel 1. Ein Ausdruck wird gesucht, welcher so ist, daß, wenn man b durch ihn dividirt, und was herauskommt, mit a multiplizirt, dann c gibt.

Hier ist

$$a \cdot \frac{b}{z} = c,$$
$$a \cdot b = c \cdot z,$$
$$\frac{ab}{c} = z;$$

und ab : c ist der gesuchte Ausdruck.

Beyspiel 2. Es wird ein Ausdruck gesucht, welcher die Eigenschaft hat, daß, wenn man c durch ihn dividirt, dann b durch das was herauskommt dividirt, und zuletzt noch a durch das, was nun herausgekommen ist, dividirt, dann d herauskommt.

Hier ist

$$a:[b:(c:z)] = d,$$
$$a = d \cdot b:(c:z),$$
$$a \cdot c:z = bd,$$
$$a \cdot c = bd \cdot z,$$
$$(ac):(bd) = z.$$

Beyspiel 3. Es wird ein Ausdruck von der Eigenschaft gesucht, daß, wenn man ihn mit q multiplizirt, dann p durch dieses Produkt dividirt, was herauskommt mit n multiplizirt, hernach m durch das letzt-

erhaltene dividirt, das nun hervorgehende wiederum mit 1 multiplizirt, dann s sich ergibt.

Hier ist

$$1 \cdot [m : (n \cdot [p : (qz)])] = s;$$

also

$$1 \cdot m = s \cdot n \cdot [p : (qz)] = s \cdot n \cdot p : (qz)$$

$$1 \cdot m \cdot q \cdot z = s \cdot n \cdot p$$

$$z = (s \cdot n \cdot p) : (1 \cdot m \cdot q).$$

Beweis ist dem des (§. 43.) erwähnten ähnlich.

Anmerkung 1. Würde der Ausdruck gesucht, welcher so ist, daß, wenn er mit a und mit b zugleich multiplizirt wird, und wenn man das letztere Produkt bz wiederum mit c multiplizirt, das erste Produkt az diesem letztern bcz gleich wird; — so hätte man

$$az = bcz;$$

und, wenn man hier durch z auf beyden Seiten dividirt,

$$a = bc.$$

Ist nun wirklich $a = bc$ gegeben, so drückt dies aus, daß für z jedweder Ausdruck gesetzt werden kann, d. h., daß jedem beliebig genommenen Ausdruck dieselbe Eigenschaft zukommt. — Ist aber nicht $a = bc$ gegeben, so enthält dieses Resultat einen Widerspruch; und es gibt dann keinen Ausdruck für z, welcher der verlangten Bedingung genügen könnte.

Anmerkung 2. Die Aufgabe in der (Anmerkung 2.) zu (§. 43.) kann nun gelöst werden. Hat man nämlich

$$p = z + z,$$

so ist auch

$$p = 2 \cdot z$$

und

$$\frac{p}{2} = z.$$

Und wäre

$$q = z + z + z,$$

so wäre

$$q = 3 \cdot z, \quad \text{also } \frac{q}{3} = z; \text{ u. s. w. f.}$$

Hätte man dagegen den Ausdruck z gesucht, welcher die Eigenschaft hat, daß, wenn man a und b durch ihn dividirt, und die erhaltenen Quotienten mit einander multiplizirt, dann c herauskommt; — so würde gewesen seyn

$$\frac{a}{z} \cdot \frac{b}{z} = c,$$

$$ab = c \cdot z \cdot z,$$

$$\frac{ab}{c} = z \cdot z;$$

aber was z selbst ist, hätte man nun noch nicht finden können. — Es läßt sich aber muthmaßen, daß ein solcher Ausdruck, wie er hier unter z gedacht wird, doch existirt, aber nicht bloß durch Multiplikation und Division zusammengesetzt, sondern durch neue Operationen, welche in der Folge noch betrachtet werden.

Eben so kann man bey den Aufgaben dieser Gattungen zu Gleichungen kommen von der Form

$$p = z \cdot z \cdot z,$$

oder $p = z \cdot z \cdot z \cdot z$ u. dgl. m.,

welche alle noch einer künftigen Auflösung entgegen sehen.

Nacherinnerung zu diesem Kapitel.

Es wird aber hier noch einmal darauf aufmerksam gemacht, daß dieses Kapitel von Paragraph zu Paragraph, bloß eine Abschrift des vorhergehenden Kapitels ist, nur mit dem Unterschiede, daß, wo dort addirt und subtrahirt worden, hier multiplizirt und dividirt werden mußte.

Anhang zum zweyten Kapitel.

Anwendung der hier entwickelten Lehren auf die allgemeine Größenlehre.

9. Lehrsatz.

Soll die benannte Zahl aE, b mal genommen werden, so multiplizirt man bloß das Maaß a derselben (die unbenannte Zahl) und läßt die Einheit E unverändert; und so bekommt man (ab)E, wenn nur a und b ganze Zahlen sind; d. h. es ist

$$b(aE) = (ba)E = a(bE).$$

Denn es wird aE zu aE addirt, wenn man a zu a addirt und die Summe (2a) auf dieselbe Einheit E bezieht, nach (I. Kap. Anhang Nr. Nr. 3 und 4.); also ist $2(aE) = (2a)E$; und eben so $3(aE) = (3a)E$; u. s. w. f., bis man zu $b(aE) = (ba)E$ gelangt.

10. Lehrsatz.

Soll die benannte Zahl aE in b gleiche Theile getheilt werden, so ist jeder Theil $= \frac{a}{b}E$, wenn nur a und b und a:b (wirkliche) ganze Zahlen sind.

Denn der Theil $\frac{a}{b}E$, wenn er b mal genommen wird, gibt nach (Nr. 10.) in der That wieder $\left(\frac{a}{b} \cdot b\right)E$ d. h. aE.

Bemerkung. Ließe man die Sätze (Nr. Nr. 9. 10.) auch noch dann gelten, wenn a eine gebrochene Zahl z. B. $\frac{1}{b}$ ist, so müßte man

$\frac{1}{b}$E als die Größe ansehen, welche b mal genommen

$\left(b \cdot \frac{1}{b}\right)$E d. h. 1E wieder gibt; und

$\left(\frac{a}{b}\right)$E stellte die Größe vor, welche b mal genommen,

$\left(b \cdot \frac{a}{b}\right)$E d. h. aE gibt, oder auch: Die gebrochene benannte Zahl

$\frac{a}{b}$E stellte das afache von $\frac{1}{b}$E vor, weil $a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ ist.

Um jedoch dasselbe auf gründlicherm Wege zu erhalten, und ohne befürchten zu müssen, daß man vom Besondern auf das Allgemeine schließe, so mag diese Bemerkung nur dazu dienen, auf das, was auf solchem analytischen Wege sich ergibt, aufmerksam zu machen, um nun zu dessen völliger und wissenschaftlicher Begründung den synthetischen Weg einzuschlagen.

11. Erklärung.

Unter $\frac{a}{b}$E (mag $\frac{a}{b}$ eine ganze oder gebrochene Zahl seyn), wollen wir die Größe verstehen, welche b mal genommen die Größe aE hervorbringt; also die Größe, welche der bte Theil von der andern Größe aE ist.

12. Zusatz.

Es entsteht nun die Frage, ob noch immer, wie in (Nr. Nr. 9 und 10.), das b fache von aE, die Größe (ab)E, und der bte Theil von aE, die Größe $\frac{a}{b}$E seyn wird, auch wenn a die Form $\frac{\alpha}{\beta}$ hat, und zugleich eine gebrochene Zahl ist, b dagegen noch immer als eine ganze Zahl gedacht wird.

Weil aber $\frac{\alpha}{\beta}E$ der βte Theil von αE ist, so ist, wenn solcher durch F bezeichnet wird, nothwendig

$$\alpha E = \beta F,$$

also

$$b(\alpha E) = b(\beta F);$$

und nun nach (Nr. 9.), weil α, β, b lauter ganze Zahlen sind,

$$(b\alpha)E = (b\beta)F = \beta(bF);$$

also

$$\frac{b\alpha}{\beta}E = bF = b\left(\frac{\alpha}{\beta}E\right),$$

oder

$$(b \cdot a)E = b(aE),$$

wenn man a statt $\frac{\alpha}{\beta}$ setzt; welches der Satz der (Nr. 9.) für den Fall ist, daß a eine gebrochene Zahl.

Ferner ist, wenn der bte Theil von $\frac{\alpha}{\beta}E$ durch G vorgestellt wird, nothwendig

$$\frac{\alpha}{\beta}E = bG;$$

also nach (Nr. 9.)

$$\beta\left(\frac{\alpha}{\beta}E\right) = \alpha E = \beta(bG) = (\beta b)G;$$

demnach $\frac{\alpha}{\beta b}E = G$ oder $\frac{a}{b}E = G$,

d. h. $\frac{a}{b}E$ stellt den, vorhin durch G bezeichneten bten Theil von aE vor, auch wenn a eine gebrochene Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$ ist.

Also gelten die (Nr. Nr. 9. 10.) auch dann noch, wenn aE eine gebrochene benannte Zahl ist, wenn nur b eine ganze Zahl.

13. Zusatz.

Es fragt sich aber, ob noch immer wie in (Nr. 9.)

$$b(aE) = (b\,a)E$$

seyn wird, auch wenn a die Form $\frac{\alpha}{\beta}$, und b zu gleicher Zeit

die Form $\frac{\gamma}{\delta}$ hat, mögen nun $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ ganze oder gebrochene Zahlen seyn.

Es bedeutet aber nach der Erklärung (Nr. 11.), $b(aE)$ d. h. $\frac{\gamma}{\delta}(aE)$ den δten Theil von $\gamma(aE)$, oder nach (Nr. 12.) von $(\gamma a)E$. Wird solcher durch H bezeichnet, so hat man demnach

$$(\gamma a)E = \delta H,$$

oder $$\left(\frac{\gamma\alpha}{\beta}\right)E = \delta H,$$

also auch $$(\gamma\alpha)E = \beta(\delta H) = (\beta\delta)H;$$

und es ist daher H der $(\beta\delta)$te Theil von $(\gamma\alpha)E$, welcher auch nach (Nr. 11.) durch $\frac{\gamma\alpha}{\beta\delta}E$ vorgestellt werden kann, d. h. durch $(b \cdot a)E$.

Also ist jetzt noch

$$b(aE) = (ba)E.$$

14. Zusatz.

Auch kann die gebrochene benannte Zahl $\frac{\alpha}{\beta}E$, als das αfache von dem βten Theil der Einheit E angesehen werden.

Denn es ist

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta},$$

demnach

$$\frac{\alpha}{\beta}E = \left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right)E = \alpha\left(\frac{1}{\beta}E\right).$$

so wie auch $$= \frac{1}{\beta}(\alpha E),$$

15. Zusatz.

1) Ist in der (Größe oder) benannten Zahl aE, die Einheit E selbst wieder als eine benannte Zahl ausgedrückt, etwa

$$E = m \cdot E_1,$$

so ist auch $$aE = a(mE_1) = (am)E_1;$$

und dieses gilt, mögen a und m ganze oder gebrochene Zahlen seyn.

2) Ist die benannte Zahl aE der benannten Zahl bE_1 gleich, d. h. ist

$$aE = bE_1,$$

so ist auch $$1E = \frac{b}{a}E_1,$$

und $$\frac{a}{b}E = 1E_1;$$

und eben so auch umgekehrt.

Beyspiele. Machen 17 Fuße = 8 Ellen,
so ist auch 1 Fuß = $\frac{8}{17}$ Elle,
$\frac{17}{8}$ Fuß = 1 Elle.

Ferner sind nach (1.)

30 Fuße = $(30 \cdot \frac{8}{17})$ Ellen = $\frac{240}{17}$ Ellen;
24 Ellen = $(24 \cdot \frac{17}{8})$ Fuße = 51 Fuße;
$\frac{7}{3}$ Fuße = $(\frac{7}{3} \cdot \frac{8}{17})$ Ellen = $\frac{56}{51}$ Ellen;
$\frac{9}{4}$ Ellen = $(\frac{9}{4} \cdot \frac{17}{8})$ Fuß = $\frac{153}{32}$ Fuß.

Anmerkung. Die Anwendung der (Nr. 1.) nennt man das Reduciren der höhern Einheiten auf niedrigere, oder der niedern Einheiten auf höhere.

16. Erklärung.

Sind A und B zwey Größen und E irgend eine gemeinschaftliche Einheit, so daß

$$A = aE \quad \text{und} \quad B = bE \text{ ist,}$$

so heißen a und b die Verhältnißzahlen der Größen A und B; und man sagt auch es verhalte sich A zu B, wie a zu b; und drückt dies wohl auch so aus

$$A:B = a:b.$$

17. Zusatz.

1) Wenn man beyde Verhältnißzahlen a und b durch eine und dieselbe Zahl m multiplicirt oder dividirt, so sind die Resul-

tate am und bm oder $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ immer wieder zwey Verhältnißzahlen derselben Größen A und B.

Denn denkt man sich Einheiten E_1 und E_2, so daß

$$E = m \cdot E_1 \quad \text{und} \quad E = \frac{1}{m} E_2 \quad \text{ist,}$$

so ist $$A = aE = (am)E_1 = \frac{a}{m} E_2$$

und $$B = bE = (bm)E_1 = \frac{b}{m} E_2,$$

woraus die Behauptung ersichtlich ist.

2) Der Quotient zweyer Verhältnißzahlen bleibt daher für dieselben Größen immer derselbe, auf welche gemeinschaftliche Einheit sie sich auch beziehen.

Denn es ist ja, nach (§. 47. Nr. 19.)

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a:m}{b:m}.$$

3) Verhalten sich zwey Größen A und B, wie zwey gegebene Zahlen a und b, d. h. ist

$$A:B = a:b,$$

so ist allemal

$$bA = aB, \quad \frac{b}{a} A = 1B \quad \text{und} \quad 1A = \frac{a}{b} B.$$

Denn, da $A = aE$ und $B = bE$ ist,

so ist $bA = (ab)E$ und $aB = (ab)E$,

also $bA = aB$.

Beyspiele. Hat man also z. B. für den Preußischen und Pariser Fuß die Verhältnißzahlen

13913 und 14400,

so hat man

14400 Preuß. Fuße = 13913 Paris. Fuße;

und auch

1 Preuß. Fuß = $\frac{13913}{14400}$ Paris. Fuß

und 1 Pariser Fuß = $\frac{14400}{13913}$ Preuß. Fuß.

18. Erklärung.

Vier Größen A, B, C, D sagt man, stehen in (geometrischer) Proportion, oder bilden eine geometrische Proportion, wenn die Verhältnißzahlen von A und B, und die von C und D eine geometrische Zahlen-Proportion bilden im Sinne des (§. 75.), d. h. wenn die Quotienten derselben einander gleich sind. Die Proportion heißt stetig, wenn ihre beyden mittlern Glieder B und C einander gleich sind.

Und sagt man: „Die Größe A verhält sich zu B, wie C zu D," so versteht man darunter, daß A, B, C, D in Proportion stehen.

19. Zusatz.

Da die Quotienten der Verhältnißzahlen nach (17. Nr. 2.) immer dieselben bleiben, auf welche gemeinschaftliche Einheit sie bezogen seyn mögen, so kann man für die Größen A und B, den Quotienten ihrer Verhältnißzahlen bequem durch

$$A:B \quad \text{oder} \quad \frac{A}{B} \text{ ausdrücken,}$$

indem man sich nun unter A und B nicht mehr die Größen selbst, sondern ihre, auf irgend eine gemeinschaftliche Einheit bezogenen Verhältnißzahlen vorgestellt denkt.

Daß A, B, C, D eine Proportion bilden, kann nun so geschrieben werden

$$A:B = C:D \quad \text{oder} \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

wenn man nur auch in dem Quotienten $C:D$ oder $\frac{C}{D}$, unter C und D nicht mehr die Größen selbst, sondern ihre Verhältnißzahlen, die sich auf eine völlig beliebige (aber gemeinschaftliche) Einheit beziehen können, vorgestellt sich denkt.

In diesem Sinne hat man natürlich auch noch

$$A \cdot D = B \cdot C$$

und

$$A = \frac{BC}{D},\ D = \frac{BC}{A},\ B = \frac{AD}{C} \text{ und } C = \frac{AD}{B};$$

so wie auch noch

$$A:C = B:D$$
$$C:A = D:B$$
$$B:A = D:C$$

u. s. w. f. (Vergl. §. 76.).

20. Lehrsatz.

Ist die Größe M von den Größen A und B, dagegen N von C und D so abhängig, daß, so oft A und C dieselben werden, sich M zu N verhalten muß, wie B zu D, und so oft B und D dieselben werden, sich M zu N verhält, wie A zu C, so ist, wenn weder $A = C$ noch $B = D$ gedacht wird

$$M : N = (A \cdot B) : (C \cdot D),$$

wenn man nur unter M, N, und A, C, und B, D nicht mehr die Größen selber, sondern ihre Verhältnißzahlen sich denkt.

Beyspiele. 1) Ist gezeigt worden, daß Rechtecke M und N von ihren Grundlinien A und C und von ihren Höhen B und D, auf die vorbeschriebene Weise wirklich abhängen, so gilt für sie der vorstehende Lehrsatz, und aus ihm geht also hervor, daß sich dann auch die Rechtecke, wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe verhalten.

2) Ist nachgewiesen worden, daß zwey, durch den Stoß bewegter Körper hervorgebrachte Wirkungen M und N, sich verhalten müßten, wenn die Geschwindigkeiten A und C dieselben wären, wie die Massen B und D, und wenn die Massen B und D dieselben wären, wie die Geschwindigkeiten A und C; so lehrt uns dieser Lehrsatz, daß sich diese Wirkungen verhalten, wie die Produkte aus den Massen in die Geschwindigkeiten.

3) Zinßen M und N zweyer in den Zeiten A und C zu demselben Zinßfuß ausgeliehener Kapitalien B und D, verhalten sich, wenn für sie die obigen Voraussetzungen statt finden, ebenfalls wie die Produkte aus den Kapitalien mit den Zeiten multiplizirt.

Beweis. Denn es sey P eine mit M und N gleichartige Größe,
so daß P von A und D abhängt
wie M von A und B
und wie N von C und D
so hat man, nach den beyden Voraussetzungen,
$$M:P = B:D,$$
und
$$P:N = A:C;$$
also nach (§. 78.)
$$(M\cdot P):(N\cdot P) = (A\cdot B):(C\cdot D).$$
und nach (§. 47. Nr. 10), auch
$$M:N = (A\cdot B):(C\cdot D).$$

21. Zusatz.

Hängt M von A, B und C, und N von D, E und F so ab, daß sich M zu N verhalten müßte, wie A zu D, oder wie B zu E, oder wie C zu F, so oft die beyden anderen Paare dieselben wären, so ist allgemein

$$M : N = (A\cdot B\cdot C) : (D\cdot E\cdot F\cdot),$$

wenn nur in dieser Gleichung unter M, N, A, D, B, E, C und F nicht mehr die Größen selber, sondern ihre Verhältnißzahlen gedacht werden.

Beyspiele. 1) Ist gezeigt worden, daß rechtwinkliche Parallelepipeda M und N, so oft je zwey ihrer 3 Kanten dieselben sind, sich immer wie das dritte Paar Kanten verhalten müssen, so lehrt uns dieser Lehrsatz, daß diese Parallelepipeda sich wie die Produkte dieser 3 Kanten verhalten.

2) Zinßen M und N hängen von den Kapitalien A und D, von den Zeiten des Ausstehens B und E, endlich von dem Zinßfuße C und F, so ab, wie es die Voraussetzungen des Lehrsatzes verlangen, also lehrt uns dieser Satz, daß sich diese Zinßen allemal verhalten müssen, wie die Produkte aus den Kapitalien in die Zeiten und in den Zinßfuß multiplizirt.

Beweis. Man denke sich eine mit M und N gleichartige Größe, so daß
P von A, B und F so abhängt,
wie M von A, B und C,
und wie N von D, E und F,

so ist nach den Voraussetzungen und nach (Nr. 20.):

$$M:P = C:F$$

und

$$P:N = (A\cdot B):(D\cdot E);$$

also nach (§. 78.):

$$(MP):(NP) = M:N = (A\cdot B\cdot C):(D\cdot E\cdot F).$$

Anmerkung. Es ist leicht zu sehen, wie sich diese letztern Sätze nach Belieben noch erweitern lassen. Zugleich fällt in die Augen, daß aus den Gleichungen der (Nr. Nr. 19. 20 und 21.) allemal eine der Verhältnißzahlen nach (§. 79.) gefunden werden kann, wenn die übrigen gegeben sind; und daß diese Verhältnißzahl auf dieselbe Einheit bezogen werden muß, auf welche die andere, mit ihr das Verhältniß bildende Größe sich bezieht, um eine der Größen aus den übrigen durch Rechnung gefunden zu haben.

Die Anwendung dieser Lehrsätze der (Nr. Nr. 19. 20. 21. und der folgenden, hier nicht weiter hingeschriebenen) um aus 3 gegebenen Größen die 4te, oder aus 5, 7, 9, ꝛc. gegebenen Größen die 6te, 8te, 10te, ꝛc. zu finden, bilden die Regula de tri, de quinque, de sextem, de novem, ꝛc. ꝛc., im allgemeinen die Kettenregel, also den wichtigsten Theil der gemeinen Rechenkunst. Und diese Aufgaben bilden wieder die Grundlage aller übrigen zusammengesetztern Aufgaben der Größenlehre, derjenigen nämlich, welche man gewöhnlich algebraische Aufgaben nennt.

Zahlenlehre.

Drittes Kapitel.

Gesetze der Mischung der Zahlenverbindungen der ersten und der zweyten Art. Von den reelen Zahlen. Von den größern und kleinern reelen Zahlen.

Vorerinnerung.

In diesem Kapitel muß gezeigt werden, wie man Summen und Differenzen mit einer Zahl multiplizirt oder dividirt; auch wie eine Zahl mit einer Summe oder Differenz multiplizirt, oder durch eine Summe oder Differenz dividirt wird; ferner, wie Produkte und Quotienten und einfache Ausdrücke zu einander addirt und von einander subtrahirt werden. — Hernach muß man aber auch nachweisen, daß, wenn die Formeln des 2ten und dieses Kapitels, und das in diesen Kapiteln gelehrte Ableiten der Gleichungen aus einander, ganz allgemein für bloße Rechnungsformen beybehalten wird, ohne sich mehr um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben zu bekümmern, man nicht mit den im ersten Kapitel durch die Verbindungen der ersten Art hervorgegangenen Resultaten, d. h. nicht mit den Differenzen ganzer Zahlen (ganze Zahl, Null und negative ganze Zahl) im Widerspruche stehen könne. Daher müßen erst eigene Definitionen den Produkten und Quotienten eine Bedeutung in Differenzen ganzer Zahlen anweisen; während zugleich gezeigt werden muß, daß alle Sätze der Produkte und Quotienten auch für diese Differenz-Produkte und Differenz-Quotienten gelten, wenn man nur kei-

nen Divisor zuläßt, welcher Null ist. Zuletzt hat man zu lehren, wie algebraische Summen mit einander multiplizirt und durch einander dividirt, auch wie algebraische Summen behandelt werden, deren Glieder Produkte und Quotienten sind.

So wie ferner zu Ende des ersten Kapitels gezeigt worden ist, daß alle Ausdrücke auf Differenzen ganzer Zahlen sich zurückführen lassen, so wird zu Ende dieses Kapitels noch gezeigt, daß alle nun möglicher Weise hervorgehenden besondern Zahlformen in dem Quotienten $\frac{a}{b}$ zweyer Differenzen ganzer Zahlen enthalten sind. Dieser Quotient enthält daher alle reele Zahlen.

In Bezug auf diese reelen Zahlen werden zuletzt noch Untersuchungen über das Größere und Kleinere angestellt, welche nachgehends in dem Anhange unmittelbar ihre Anwendung auf Größen finden. Da die reelen Zahlen bloße Rechnungsformen sind, so muß, welche die größere, welche dagegen die kleinere genannt werden soll, vorher bestimmt definirt werden. Die Definitionen sind dann freylich so zu wählen, daß in den Anwendungen auf benannte Zahlen oder Größen, die größere oder kleinere unbenannte Zahl, auch wieder der größern oder kleinern benannten Zahl oder Größe entspricht.

Erste Abtheilung.

Einfachste Gesetze dieser Mischung.

---

§. 80. Willkührlicher Satz.

Wenn Verbindungen der zweyten Art (also Produkte oder Quotienten) aufs neue durch Verbindungen der ersten Art (Addition oder Subtraktion) mit einander verbunden werden, so läßt man die, die erstern einschließenden Klammern weg. Umgekehrt also: in den hier vorkommenden gemischten Zahlen-Verbindungen, wenn nicht genau durch Klammern angedeutet ist, in welcher Folge sie

vorgenommen sind, müssen die Verbindungen der 2ten Art als zuerst vorgenommen, gedacht werden.

Beyspiele. So schreibt man nicht

$$(a \cdot c) \pm (b \cdot c)$$

und nicht $(a : c) \pm (b : c)$,

sondern bloß $a \cdot c \pm b \cdot c$

und $a : c \pm b : c$. —

Und der Ausdruck $p - q \cdot m$ wird nicht verstanden

$(p - q) \cdot m$,

sondern $p - (q \cdot m)$.

§. 81. Lehrsätze.

Die Lehrsätze aber, welche lehren, wie eine Summe oder eine Differenz und eine einfache Zahl, mit einander multiplizirt oder durch einander dividirt werden; ferner: wie man Produkte und Quotienten und einfache Zahlen addirt und subtrahirt zu oder von einander, sind folgende:

1) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,

2) $(a-b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$,

3) $(a+b) : c = a : c + b : c$ oder $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$,

4) $(a-b) : c = a : c - b : c$ oder $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$,

5) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$,

6) $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$,

7) $a : (b+c)$; 8) $a : (b-c)$;

9) $a + b \cdot c = b \cdot c + a$;

10) $a - b \cdot c$; 11) $b \cdot c - a$;

12) $a + b : c = b : c + a = (ac+b) : c$ oder $a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$,

13) $a - b : c = (ac-b) : c$ oder $a - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$,

14) $a : b - c = (a - bc) : b$ oder $\frac{a}{b} - c = \frac{a-bc}{b}$,

welche

welche hier folgend noch näher erörtert werden sollen, und bey welchen hier vorläufig vorausgesetzt wird, daß alle Subtraktionen und alle Divisionen möglich sind, also daß man durchaus nur wirkliche (ganze) Zahlen habe.

Lehrsatz 1. Eine Summe a+b wird mit einer Zahl c multiplizirt, wenn man jeden der Summanden a und b mit c multiplizirt, und zuletzt die Produkte addirt; d. h. es ist

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c.$$

Beweis. Denn (a+b)·c bedeutet die Zahl, welche entsteht, wenn man a+b, c mal nimmt, und alle diese a+b zu einander addirt. Nun ist es aber nach (§. 20.) einerlei, in welcher Ordnung man alle diese addirte Zahlen nimmt; also kann man zuerst alle a zusammen addiren, und erhält a·c; dann alle b zusammen addiren, und dies gibt b·c; zuletzt aber auch noch diese beyden Resultate a·c und b·c zusammenaddiren, um alle Zahlen zusammen addirt zu haben.

Lehrsatz 2. Eine Differenz a—b wird mit einer Zahl c multiplizirt, wenn man sowohl den Minuenden a, als auch den Subtrahenden b, mit c multiplizirt, und das letztere Produkt von dem erstern subtrahirt; d. h. es ist

$$(a-b)\cdot c = a\cdot c-b\cdot c.$$

Beweis. Denn es ist nach (Lehrsatz 1.)

$$[(a-b)+b]\cdot c = (a-b)\cdot c+b\cdot c$$

$$\text{d. h. } a\cdot c = (a-b)\cdot c+b\cdot c;$$

folglich, wenn man b·c auf beyden Seiten subtrahirt,

$$a\cdot c-b\cdot c = (a-b)\cdot c.$$

Diese beyden Lehrsätze können auch so ausgesprochen werden: Zwey Produkte ac und bc, welche einen gemeinschaftlichen Faktor c haben, werden zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor c herausetzt, und die nicht gemeinschaftlichen Faktoren a und b addirt oder subtrahirt. — Also ist z. B.

$$ax \pm bx = (a \pm b)x.$$

Lehrsatz 3. Eine Summe a+b wird durch eine Zahl c di-

Bayerische Staatsbibliothek München

vidirt, wenn man jeden der Summanden dividirt, und die erhaltenen Quotienten addirt; d. h. es ist

$$(a+b):c = a:c+b:c \text{ oder } \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c}+\frac{b}{c}.$$

Beweis. Denn es ist nach (Lehrsatz 1.):

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)\cdot c = \frac{a}{c}\cdot c+\frac{b}{c}\cdot c = a+b;$$

also, wenn man mit c auf beiden Seiten dividirt, auch

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Lehrsatz 4. Eine Differenz a—b wird durch eine Zahl c dividirt, wenn man den Minuenden a, und auch den Subtrahenden b, durch c dividirt, und letzteren Quotienten von ersterem subtrahirt; d. h. es ist

$$(a-b):c = a:c-b:c \text{ oder } \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c}-\frac{b}{c}.$$

Beweis. Denn es ist nach (Lehrsatz 2.):

$$\left(\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)\cdot c = \frac{a}{c}\cdot c-\frac{b}{c}\cdot c = a-b;$$

also, wenn man durch c auf beyden Seiten dividirt, auch

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Diese beyden Lehrsätze können auch so ausgesprochen werden: Zwey Quotienten $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$, die einen gemeinschaftlichen Divisor c haben, werden zu oder von einander addirt oder subtrahirt, wenn man die Dividenden a und b addirt oder subtrahirt, und den gemeinschaftlichen Divisor c beybehält.

Lehrsatz 5. Eine Zahl a wird b+c mal genommen, wenn man sie erst b mal, dann noch c mal nimmt, und beyde Resultate a·b und a·c noch zusammenaddirt; d. h. es ist

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c.$$

Beweis. Denn es ist $a(b+c) = (b+c)a = ba+ca = ab+ac$.

Lehrsatz 6. Eine Zahl a wird b—c mal genommen, wenn man sie zuerst b mal, hernach c mal nimmt, und letzteres Resultat $a \cdot c$ von ersterem $a \cdot b$ subtrahirt; d. h. es ist:

$$a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Beweis. Denn es ist nach (Lehrsatz 5.):

$$a \cdot [(b-c)+c] = a(b-c)+ac$$

d. h. $$a \cdot b = a(b-c)+ac;$$

also, wenn man ac auf beyden Seiten subtrahirt,

$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b-c).$$

Oder auch: es ist $a(b-c) = (b-c)a = ba-ca = ab-ac$.

Lehrsätze 7. und 8. müssen zur Zeit noch ausfallen, weil nicht einfache Summen oder Differenzen entstehen, wenn eine Zahl a durch eine Summe b+c oder durch eine Differenz b—c dividirt wird. *)

Lehrsätze 9. 10. und 11. enthalten ebenfalls keine bemerkenswerthen Gesetze.

Lehrsätze 12. 13. und 14. Die Summe oder Differenz einer einfachen Zahl und eines Quotienten wird in einen Quotienten verwandelt, wenn man die einfache Zahl zuerst mit dem Divisor multiplizirt, und dann den Divisor auf das Ganze ausdehnt; nämlich:

$$a + \frac{b}{c} = \frac{b}{c} + a = \frac{ac+b}{c};$$

$$a - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}; \qquad \frac{a}{b} - c = \frac{a-bc}{b}.$$

---

*) Es ist nehmlich $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b(b+c)} = \frac{a}{b} - \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b+c}$;

und $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b(b-c)} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b-c}$.

Beweis. Denn es ist $a = \frac{ac}{c}$, oder $c = \frac{bc}{b}$; also geschieht die Addition oder die Subtraktion nach (Nr. Nr. 3. und 4.), weil man nun zwey Quotienten hat, die mit einem gemeinschaftlichen Divisor c versehen sind.

§. 82. Zusatz.

Uebersieht man die Beweise dieser Sätze und die (§. §. 14. und 48.) so erhellet bald, daß alle möglichen Gleichungen dieser Kapitel abgeleitet sind und werden

α) aus den Sätzen

1) $a + b = b + a$,
2) $(a + b) + c = (a + c) + b$,
3) $a \cdot b = b \cdot a$,
4) $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$,
5) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$,
6) $(a - b) + b = a$,
7) $(a + b) - b = a$,
8) $a - (a - b) = b$,
9) $(a : b) \cdot b = a$,
10) $(a \cdot b) : b = a$,
11) $a : (a : b) = b$;

von denen (1. und 2.) das Grundwesen der Addition, (3. und 4.) das Grundwesen der Multiplikation und (5.) das Grundwesen der Mischung der Addition mit der Multiplikation aussprechen, während die übrigen Gleichungen die bekannten reinen Gegensätze zwischen der Addition und den beyden Subtraktionen, so wie zwischen der Multiplikation und ihren beyden Divisionen enthalten;

β) mit Anwendung der Sätze (§. 11. Nr. 4. und §. 45. Nr. 4.), daß nämlich Gleiches und Gleiches zu einander addirt, von einander subtrahirt, mit einander multiplizirt und auch durch einander dividirt, doch immer wieder Gleiches gibt; endlich

γ) in Verbindung mit dem Satze (§. 9.), daß wenn zwey Ausdrücke einem dritten gleich sind, solche dann auch unter sich gleich seyn müssen.

Ferner erhellet, daß man mit Anwendung dieser Sätze (α, β, γ) nicht nur alle die in den vorhergehenden beyden Kapiteln als entwickelbar nachgewiesenen Sätze, ferner nicht nur die in diesem Kapitel (§. 81.) bereits hingestellten, sondern auch noch ohne Ende fort neue Gleichungen erhalten werde.

Und umgekehrt, wird jede hieher gehörige Gleichung (und, wie wir aus (§§. 14. und 48.) schon wissen, auch jede zu den vorhergehenden Kapiteln gehörige) nur durch Anwendung der vorstehenden Regeln (α, β, γ) ganz allein, und ohne daß irgend etwas noch zu Hülfe genommen werden müßte, abgeleitet.

§. 83. Aufgabe.

Man soll den Ausdruck finden, welcher zu x addirt, den Quotienten $\frac{A}{B}$ gibt.

Auflösung. Wird solcher durch z bezeichnet, so hat man

$$\frac{A}{B} = x + z,$$

also, wenn mit B auf beyden Seiten multiplizirt wird,

$$A = Bx + Bz;$$

demnach $$A - Bx = Bz.$$

Dividirt man nun noch durch B auf beyden Seiten, so ergibt sich

$$\frac{A - Bx}{B} = z;$$

und $\frac{A - Bx}{B}$ ist der verlangte Ausdruck.

Beweis ähnlich den (§§. 16—18.) gegebenen.

§. 84. Zusatz.

Die eben gefundene Formel

$$\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B}$$

ist diejenige, deren man sich bedienen kann, um einen gegebenen Quotienten $\frac{A}{B}$ auf die Form einer Summe zu bringen, von welcher übrigens freylich der zweyte Summand selber, im Allgemeinen, wieder Quotienten-Form hat. —

In Worten, lehrt diese Formel:

„Ein Quotient $\frac{A}{B}$ wird in eine Summe von zwey Summanden verwandelt, wenn man den ersten Summanden x ganz beliebig nimmt, dann aber den zweyten dadurch dazu findet, daß man diesen ersten x mit dem Divisor B multiplizirt, das Produkt Bx von dem Dividenden A subtrahirt, und zuletzt diese Differenz A—Bx durch den Divisor B wieder dividirt."

Anmerkung 1. Man kann sich dieser Formel bedienen, um z. B. $\frac{a}{b-c}$ in eine Summe zu verwandeln, deren ersten Summanden $\frac{a}{b}$ man beliebig nimmt. Der zweyte Summand wird nun gefunden, wenn man diesen ersten $\frac{a}{b}$, mit dem Divisor b—c multiplizirt, — gibt $\frac{a}{b}(b-c)$ d. h. $\frac{a}{b}\cdot b - \frac{a}{b}\cdot c$ d. h. $a - \frac{ac}{b}$; — dieses Produkt von dem Dividenden a subtrahirt, — gibt $a - a + \frac{ac}{b}$ d. h. $\frac{ac}{b}$, — und dieses wieder durch den Divisor b—c dividirt, — gibt $\frac{ac}{b} : (b-c)$ d. h. $\frac{ac}{b\cdot(b-c)}$, so daß zuletzt sich findet

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b\cdot(b-c)}.$$

Anmerkung 2. Da nach Anwendung der Formel

$$\frac{A}{B} = x + \frac{A-Bx}{B}$$

der zweyte Summand in der Regel selber wieder ein Quotient ist, so kann man ihn selbst wieder nach demselben Gesetz in eine solche Summe zweyer Summanden zerlegen, so daß dann $\frac{A}{B}$ in eine Summe 3er Summanden zerlegt erscheint. Und da dieser letzte Summand immer wieder, in der Regel, ein Quotient ist, folglich nach derselben Formel immer

noch in eine Summe zweyer Summanden zerlegt werden kann, so ergeben sich für den erst gegebenen Quotienten $\frac{A}{B}$ nach und nach Summen von 4, 5, 6, 7, ja beliebig viel Summanden, deren jeder einzelne ihm gleich ist.

Beyspiel. So findet sich z. B.

$$\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{bb} + \frac{cc}{bb} \cdot \frac{a}{b-c}$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{bbb} + \frac{ccc}{bbb} \cdot \frac{a}{b-c}$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{ac}{bb} + \frac{acc}{bbb} + \frac{accc}{bbbb} + \frac{cccc}{bbbb} \cdot \frac{a}{b-c} = \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Anmerkung 3. Es fragt sich aber jetzt nur noch, ob man die Lehrsätze (§. 81.) und alle die nach (§. 82.) ohne Ende fort abgeleiteten Gleichungen unbedingt und ohne Einschränkung statt finden lassen dürfe, auch wenn die vorkommenden Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten, d. h. die Formen $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$ oder $a:b$, bloße Rechnungsformen sind; d. h. ob man nie zu befürchten habe, daß zuletzt in Bezug auf die Zahl, widersprechende Resultate hervorgehen könnten.

Gedenkt man indessen der Beweise der (§. §. 29. und 63.) und will man einen ähnlichen Lehrsatz und Beweis auch hier aufstellen, so ergibt sich bald der hier besondere Umstand, daß man durch die früheren Verallgemeinerungen der (§. §. 29. 30. 63. und 64.) nicht mehr bloß (wirkliche, ganze) Zahlen, sondern auch bereits die negativen ganzen Zahlen, die Null und die gebrochenen Zahlen erhalten hat, mit denen man nicht in Widerspruch gerathen darf, wenn man nicht zuletzt Resultate erhalten will, welche mit früher erhaltenen im Widerspruche stehen, und welche daher zuletzt, in Bezug auf die (wirkliche) Zahl selbst, widersprechende Resultate hervorbringen können.

Es ist jedoch bekannt, daß, wenn man von wirklichen (ganzen) Zahlen ausgegangen ist, und nun im 1sten Kapitel den Begriff der Differenz $a-b$ ganz allgemein aufgefaßt hat, man nun die speziellen Zahlenbegriffe der Null und der negativen Zahlen erhalten hat, so daß die Differenz zweyer wirklichen (ganzen) Zahlen es ist, mit welcher man bey dem Uebergang zu den weitern Operationen, und bey dem folgenden Verallgemeinern, nicht im Widerspruche seyn darf. Wenn

daher im 2ten Kapitel (§. 63.) auf die Differenz ganzer Zahlen nicht, sondern auf die ganze Zahl allein Rücksicht genommen wurde, so konnte dies nur in so ferne geschehen, als da absichtlich nur Multiplikation und Division allein, nicht aber zugleich Subtraktion oder Addition in's Spiel kommen sollte, also ein Widerspruch von dieser Seite nicht zu erwarten war.

Jetzt dagegen, wo Addition und Subtraktion mit Multiplikation und Division gemischt vorkommen, muß allerdings, soll das Verallgemeinern der Gleichungen erlaubt seyn, nicht bloß darauf gesehen werden, daß man nicht mit der Zahl, sondern es muß auch gezeigt werden, daß man nicht mit der Differenz zweyer (wirklichen, ganzen) Zahlen, in Widerspruch gerathen könne.

Diese Betrachtung zwingt uns, eigene Begriffe für das Produkt und den Quotienten hinzustellen, für den Fall, daß die Multiplikatoren und Divisoren, Differenzen zweyer (wirklichen, ganzen) Zahlen sind; und dann nachzuweisen, daß die Sätze (α, β und γ) des (§. 82.) für diese Differenz-Produkte und Differenz-Quotienten noch gelten; denn nur dann erst sind wir im Stande einzusehen, daß das allgemeine Ableiten der Gleichungen, wenn wir solches nach (§. 82.) statt finden lassen wollen, weder mit der Zahl, noch mit der Differenz zweyer (wirklichen, ganzen) Zahlen (d. h. auch nicht mit der Null und mit der negativen (ganzen) Zahl), also mit nichts im Widerspruche stehen werde, was in dem vorhergehenden als wahr erkannt worden ist.

Dabey führt uns die Formel

$$a(b-c) = ab-ac,$$

wenn wir die Absicht haben, wenigstens sie allgemein geltend zu machen, auch für den Fall, daß $b=c$ oder b kleiner als c gedacht wird), zu dem, was wir, im System, als Definition des Produkts ap hinzustellen haben, für den Fall, daß p eine Differenz zweyer (wirklichen, ganzen) Zahlen, also wohl auch Eins oder Null oder eine negative (ganze) Zahl ist.

Alle diese zergliedernden Betrachtungen führen uns aber zu dem, in der nun folgenden 2ten Abtheilung beobachteten systematischen Gange, der, wie allemal da, wo es auf scharfe Begründung ankommt, synthetisch seyn muß, während man durch vorausgeschickte analytische Betrachtungen nur zu der Nothwendigkeit eines solchen Ganges hingewiesen wird.

Zweyte Abtheilung.

Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Gesetze dieser gemischten Zahlen-Verbindungen.

---

§. 85. Erklärung.

Das Produkt ab heißt ein ganzes Produkt, wenn b eine wirkliche (ganze) Zahl ist, auch wenn a schon ganz allgemein gedacht ist; und dieses ganze Produkt soll noch immer die Summe a+a+a+a+.... von b Summanden bedeuten, nur daß diese Summe jetzt schon eine allgemeine ist.

Anmerkung. Das ganze Produkt ab schließt den Fall nicht aus, daß a selbst eine wirkliche (ganze) Zahl ist. Das ganze Produkt schließt also das frühere (wirkliche) Produkt als einen besondern Fall in sich.

§. 86. Zusatz.

Es gelten aber noch immer die Lehrsätze (1. 2. 5. und 6. des §. 81.), wenn die Produkte alle, solche ganze Produkte sind; weil dieselben dort gegebenen Beweise hier nur wiederholt werden dürfen. — Es ist also noch immer:

1) $(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$,
2) $(a-b)\cdot c = a\cdot c-b\cdot c$,
3) $a(b+c) = a\cdot c+b\cdot c$,
4) $a(b-c) = a\cdot c-b\cdot c$.

§. 87. Zusatz.

Zu gleicher Zeit folgt noch aus der Definition (§. 85.):

1) $0\cdot b = 0$, 2) $1\cdot b = b$,
3) $(-a)\cdot b = -(ab) = -ab$,
4) $a(b+1) = ab+a$,

wenn nur b eine (wirkliche, ganze) Zahl ist.

§. 88. Erklärung.

Das Produkt a·b heißt ein Differenz-Produkt, wenn b eine Differenz $\alpha-\beta$ zweyer wirklichen (ganzen) Zahlen vorstellt, während a bereits ganz allgemein gedacht wird. Und da, wenn α größer ist als β, $ab = a(\alpha-\beta) = a\cdot\alpha - a\cdot\beta$ ist, so wollen wir unter ab noch immer die Differenz $a\alpha - a\beta$ verstehen, sowohl wenn α größer als β, als auch wenn α gleich oder kleiner als β ist. Dabey sind $a\alpha$ und $a\beta$ ganze Produkte, welche nach (§. 85.) allgemeine Summen bedeuten, und für welche nach (§. 86.) noch die (Lehrsätze 1. 2. 5. und 6. des §. 81.) gelten, wie solche (§. 86.) zu sehen sind.

Anmerkung. Nach dieser Erklärung ist das Differenz-Produkt allgemeiner als das ganze Produkt, und schließt das ganze Produkt als einen besondern Fall in sich.

§. 89. Zusatz.

Weil aber, wenn α, β und γ beliebige (wirkliche, ganze) Zahlen bedeuten

$$\alpha-\beta = (\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) = (\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$$

ist, weil also b, wenn es die Differenz $\alpha-\beta$ vorstellt, zugleich die Differenzen

$$(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) \text{ und } (\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$$

vorstellen wird, weil demnach die vorstehende Erklärung für die Bedeutung des Produkts ab

einmal die Differenz $a\cdot\alpha - a\cdot\beta$,

dann auch die Differenz $a(\alpha+\gamma) - a(\beta+\gamma)$,

endlich auch die Differenz $a(\alpha-\gamma) - b(\beta-\gamma)$

geben wird, so fragt sich mit Recht zuerst, ob diese 3 letztern Differenzen einander gleich sind.

Es ist aber nach (§. 86. Nr. 3. und Nr. 4.):

$$a\cdot(\alpha+\gamma) = a\cdot\alpha + a\cdot\gamma,$$
$$a\cdot(\beta+\gamma) = a\cdot\beta + a\cdot\gamma,$$
$$a\cdot(\alpha-\gamma) = a\cdot\alpha - a\cdot\gamma,$$
$$a\cdot(\beta-\gamma) = a\cdot\beta - a\cdot\gamma,$$

weil, nach der Voraussetzung, diese Produkte lauter ganze Produkte sind, demnach (§. 86.) hier gilt. Daraus folgt aber die Gleichheit der vorstehenden 3 anscheinlich verschiedenen Bedeutungen des Differenz-Produkts ohne weiters. Und das Differenz-Produkt hat also jedesmal eine völlig bestimmte, und nur eine einzige Bedeutung.

Endlich folgt zugleich hieraus, daß wenn

$$a = b, \quad \text{und} \quad c = d \quad \text{ist,}$$

während c und d Differenzen zweyer (ganzen, wirklichen) Zahlen sind, dann auch

$$a \cdot c = b \cdot c$$

und

$$a \cdot c = b \cdot d$$

seyn werde, d. h. daß Gleiches mit gleichen Differenzen ganzer Zahlen multiplizirt, Gleiches wieder gibt.

§. 90. Zusatz.

Nach dieser Erklärung muß man sich aber unter $a \cdot 0$, weil $0 = \alpha - \alpha$ ist, die Differenz $a \cdot \alpha - a \cdot \alpha$, d. h. selber 0 (Null) denken. Desgleichen ist $a \cdot 1$ nichts weiter als $a(\alpha + 1) - a\alpha$, d. h. $a\alpha + a - a\alpha$; d. h. $a \cdot 1 = a$. Und unter $a \cdot (-\beta)$ muß man, weil $-\beta = \alpha - (\alpha + \beta)$ ist, die Differenz $a\alpha - a(\alpha + \beta)$ d. h. $a \cdot \alpha - a \cdot \alpha - a\beta$ d. h. $-a\beta$ sich denken, wo β eine (wirkliche, ganze) Zahl vorstellt. Man hat also noch:

$$1) \quad a \cdot 0 = 0,$$

$$2) \quad a \cdot 1 = a$$

$$3) \quad a \cdot (-\beta) = -a\beta,$$

so wie

$$4) \quad 0 \cdot b = 0,$$

wenn nur β eine (wirkliche, ganze) Zahl, und b eine Differenz zweyer (wirklichen, ganzen) Zahlen bedeutet.

§. 91. Zusatz.

Es entsteht nun die Frage, ob die (§. 82.) für das Ableiten der Gleichungen für nöthig befundenen Sätze noch gelten, wenn Differenz-Produkte vorkommen, und wenn dabey, wie sich von sel-

ber versteht, auf Division noch gar nicht Rücksicht genommen wird; d. h. es fragt sich, ob auch für Differenz-Produkte, wie sie oben (§. 88. und §. 89.) bestimmt worden sind, noch gelten

1) von (§. 82. α) die Sätze

$$a \cdot b = b \cdot a,$$

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b,$$

und

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c;$$

2) von (§. 82. β) der Satz, daß Gleiches mit Gleichem multiplizirt, Gleiches gibt?

Denn die übrigen Sätze des (§. 82.), in so ferne man bloß noch auf Addition und Subtraktion Rücksicht nehmen darf, sind schon im ersten Kapitel außer Zweifel gesetzt.

Was nun die (Nr. 2.) dieser Fragen betrifft, so ist solche schon gegen Ende des (§. 89.) durch Bejahung erlediget. — In Bezug auf (Nr. 1.) folgen hier noch die nöthigen Untersuchungen.

Soll nämlich untersucht werden, ob noch immer

$$ab = ba$$

seyn werde, auch für den Fall, daß a die Differenz $\alpha - \beta$ und b die Differenz $\gamma - \delta$ vorstellt, wo α, β, γ, δ beliebige (wirkliche, ganze) Zahlen seyn sollen, so soll eigentlich untersucht werden, ob

$$\alpha \cdot \gamma - a \cdot \delta = b \cdot \alpha - b \cdot \beta$$

seyn werde, weil wir uns

unter $a \cdot b$ die Differenz $a\gamma - a\delta$,

und unter $b \cdot a$ die Differenz $b\alpha - b\beta$

zu denken haben. Nun ist aber nach (§. 86.)

$$a\gamma = (\alpha - \beta)\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma,$$

$$a\delta = (\alpha - \beta)\delta = \alpha\delta - \beta\delta,$$

also

$$a\gamma - a\delta = \alpha\gamma - \beta\gamma - \alpha\delta + \beta\delta.$$

Und eben so findet sich

$$b\alpha = (\gamma - \delta)\alpha = \gamma\alpha - \delta\alpha,$$

$$b\beta = (\gamma - \delta)\beta = \gamma\beta - \delta\beta,$$

also

$$b\alpha - b\beta = \gamma\alpha - \delta\alpha - \gamma\beta + \delta\beta;$$

und demnach, weil $\gamma\alpha = \alpha\gamma$, $\delta\alpha = \alpha\delta$, ꝛc. ꝛc., auch

$$a\gamma - a\delta = b\alpha - b\beta,$$

d. h. $$a \cdot b = b \cdot a.$$

Will man ferner untersuchen, ob

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$$

für den Fall noch ist, daß b die Differenz $\alpha - \beta$ und c die Differenz $\gamma - \delta$ vorstellt, während α, β, γ, δ wirkliche ganze Zahlen sind, so muß man:

unter ab sich denken $a\alpha - a\beta$

und unter $(ab) \cdot c$ sich denken $(ab)\gamma - (ab)\delta$

d. h. $(a\alpha - a\beta)\gamma - (a\alpha - a\beta)\delta$ d. h. $(a\alpha)\gamma - (a\beta)\gamma - (a\alpha)\delta + (a\beta)\delta$,

also auch $a(\alpha\gamma) - a(\beta\gamma) - a(\alpha\delta) + a(\beta\delta)$. *)

Dann muß gedacht werden:

unter ac die Differenz $a\gamma - a\delta$

und unter (ac)b die Differenz $(a\gamma - a\delta)\alpha - (a\gamma - a\delta)\beta$

d. h. $(a\gamma)\alpha - (a\delta)\alpha - (a\gamma)\beta + (a\delta)\beta$,

also auch $a(\gamma\alpha) - a(\delta\alpha) - a(\gamma\beta) + a(\delta\beta)$;

folglich ist in der That noch

$$(ab) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b.$$

Soll zuletzt untersucht werden, ob noch seyn wird

$$(a+b)c = ac + bc,$$

auch wenn $c = \alpha - \beta$ ist, und α, β beliebige wirkliche ganze Zahlen sind, so muß man sich vorstellen:

unter $(a+b)c$ die Differenz $(a+b)\alpha - (a+b)\beta$

d. h. $a\alpha + b\alpha - a\beta - b\beta$;

unter ac die Differenz $a\alpha - a\beta$

und unter bc die Differenz $b\alpha - b\beta$,

also unter $ac + bc$ den Ausdruck $a\alpha + ba - a\beta - b\beta$.

Demnach ist auch jetzt noch

$$(a+b)c = ac + bc.$$

---

*) Es ist nämlich nach (§. 85.) und (§. 86. Nr. 3.)

$$(a\alpha)\gamma = a\alpha + a\alpha + a\alpha + a\alpha + \ldots.$$
$$= a(\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \ldots.)$$
$$= a(\alpha\gamma);$$

desgleichen $(a\beta)\gamma = a(\beta\gamma)$, $(a\alpha)\delta = a(\alpha\delta)$ und $(a\beta)\delta = a(\beta\delta)$.

§. 92. Zusatz.

Da nun alle Sätze (α, β, γ des §. 82.) gelten, wenn nur Addition, Subtraktion und Multiplikation (in diesem letztern Sinne der Differenz-Produkte) aber keine Division berücksichtigt wird, so gelten auch alle aus diesen nach Anweisung des (§. 82.) ohne Division erhaltenen Gleichungen; also namentlich gelten, außer

$$1)\quad (a+b)c = ac+bc,$$

auch noch

$$2)\quad (a-b)c = ac-bc,$$

$$3)\quad a(b+c) = ab+ac,$$

$$4)\quad a(b-c) = ab-ac,$$

für den Fall, daß alle Buchstaben a, b, c Differenzen ganzer Zahlen bedeuten.

§. 93. Erklärung.

Der Quotient $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ heißt ein Differenz-Quotient, wenn a und b Differenzen (wirklicher) ganzer Zahlen vorstellen; nnd er soll diejenige Differenz wirklicher (ganzer) Zahlen bedeuten, welche mit dem Divisor b multiplizirt, den Dividenden a wieder gibt.

§. 94. Zusatz.

Es ist also wiederum

$$\frac{a}{b}\cdot b = a,$$

$$\frac{a\cdot b}{b} = a,$$

$$a:\frac{a}{b} = b;$$

auch wenn die vorkommenden Quotienten Differenz-Quotienten sind.

§. 95. Zusatz.

Es fragt sich aber wieder zunächst, 1) ob dem Differenz-Quotienten allemal eine Bedeutung zukommt, und 2) ob alle-

mal auch nur eine einzige Bedeutung. Die erstere Frage muß verneinend beantwortet werden, weil die Differenz (wirklicher) ganzer Zahlen auch selbst eine (wirkliche, ganze) Zahl seyn kann, und wir wohl wissen, daß wenn a und b selbst ganze Zahlen werden, nicht nothwendig allemal a:b oder $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl, und dann auch überhaupt nicht eine Differenz ganzer Zahlen, werden könne. — Dasselbe findet natürlich eben so oft statt, wenn a und b etwa negative ganze Zahlen sind.

Um die zweyte Frage zu beantworten, muß man untersuchen, ob, wenn a die Differenz $\alpha-\beta$, und b die Differenz $\gamma-\delta$ vorstellt, es zwey verschiedene und einander nicht gleiche Differenzen wirklicher Zahlen $\mu-\nu$ und $\varepsilon-\zeta$, geben könne, wo jede die Eigenschaft hat, daß sie mit $\gamma-\delta$ multiplizirt, $\alpha-\beta$ wieder gibt.

Sind aber die Differenzen $\mu-\nu$ und $\varepsilon-\zeta$ nicht gleich, so ist ihre Differenz.

$$(\mu-\nu)-(\varepsilon-\zeta) \text{ d. h. } (\mu+\zeta)-(\nu+\varepsilon)$$

eine Differenz ganzer Zahlen, welche nicht 0 (Null) ist, und welche durch p—q vorgestellt seyn mag. Wäre nun

$$(\gamma-\delta)(\mu-\nu) = \alpha-\beta$$

und auch $$(\gamma-\delta)(\varepsilon-\zeta) = \alpha-\beta,$$

so wäre auch, wenn man links und rechts subtrahirt, nach (§. 81. Nr. 6 und §. 92. Nr. 4.)

$$(\gamma-\delta)(p-q) = (p-q)(\gamma-\delta) = 0$$

d. h. $$(p-q)\gamma-(p-q)\delta = 0,$$

welches, da p—q nicht Null ist, nur möglich ist, wenn $\gamma=\delta$.

Daraus geht hervor:

1) So lange nicht $\gamma=\delta$ d. h. so lange der Divisor b nicht Null ist, so lange kann es nicht zwey einander ungleiche Differenzen ganzer Zahlen geben $\mu-\nu$ und $\varepsilon-\zeta$, welche mit b oder $\gamma-\delta$ multiplizirt, a oder $\alpha-\beta$ geben könnten. — So lange also der Divisor b nicht 0 ist, so lange hat der Differenzquotient, wenn er eine Bedeutung hat, doch immer nur eine einzige; d. h. er ist nur eindeutig.

2) Ist a nicht Null, dagegen b Null, so hat der Quotient $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ gar keine Bedeutung, weil jede Differenz ganzer Zahlen $\mu-\nu$, mit b d. h. mit Null multiplizirt, selber wieder Null gibt, also nicht a geben kann, so lange a nicht Null ist.

3) Sind dagegen a und b zugleich Null, so hat der Differenzquotient $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ oder $\frac{0}{0}$ unendlich viele Bedeutungen, d. h. eine völlig unbestimmte Bedeutung, weil es unendlich viele einander ungleiche Differenzen ganzer Zahlen gibt, welche mit 0 multiplizirt, Null wieder geben.

§. 96. Willkührlicher Satz.

Um nicht die Unbequemlichkeit zu haben, die Vieldeutigkeit des Differenzquotienten $\frac{a}{b}$ für den Fall, daß $b = 0$ wird, jedesmal gehörig berücksichtigen zu müssen, setzen wir hier ein für allemal fest, von nun an keine Divisoren zuzulassen, welche Null sind, also bey jedem Divisor b stillschweigend vorauszusetzen, daß er nicht Null sey.

Unter dieser Voraussetzung hat also der Differenzquotient, wenn er eine Bedeutung hat, doch immer nur eine einzige; d. h. der Differenzquotient ist jedesmal nur eindeutig.

Wenn aber dann, in der Folge der Anwendungen, ein solcher Divisor b, von welchem man während der Rechnung vorausgesetzt hat, daß er nicht Null sey, dennoch Null wird, so folgt von selbst, daß das allgemeine Rechnungsresultat für diesen speziellen Fall nicht nothwendige Gültigkeit hat, und daß man daher für diesen speziellen Fall, die nun statt findende Rechnung besonders anstellen und dabey den Divisor b, d. h. Null, vermeiden muß.

Anmerkung. Dieser Satz ist in den Anwendungen von ungemeiner Wichtigkeit, und liefert diejenigen Ausnahmen, welche die allgemeine Rechnung zuweilen erleidet.

§. 97.

§. 97. Zusatz.

Aus der Eindeutigkeit der Differenzquotienten folgt auch noch, daß gleiche Differenzen (ganzer) wirklicher Zahlen, durch gleiche Differenzen (ganzer) wirklicher Zahlen dividirt, gleiche Resultate geben.

§. 98. Zusatz.

Es gelten also für Differenzen wirklicher (ganzer) Zahlen alle Sätze (α, β und γ) des (§. 82.), wie solche längst vorher für wirkliche (ganze) Zahlen erkannt worden waren. Daher gelten, unter der Voraussetzung, daß man durchaus Differenzen (ganzer) wirklicher Zahlen habe (d. h. daß die einzelnen Buchstaben, die einzelnen Produkte, und auch die einzelnen Quotienten alle, als Differenzen (ganzer) Zahlen möglich sind), alle nach (§. 82.) abgeleiteten Gleichungen, also namentlich auch alle Gleichungen des 2ten und dieses 3ten Kapitels, in dem allgemeinern Sinne, wie solcher (§. 30.) im ersten Kapitel aufgefaßt worden ist, so nämlich, daß man überzeugt ist, nie mit der Zahl selbst und mit dem, was von ihr gilt, in Widerspruch zu gerathen; wenn nur nie durch Null dividirt wird, d. h. wenn bey jedem sichtbaren Divisor vorausgesetzt wird, daß er nicht Null sey.

§. 99. Zusatz.

Aber eben deswegen kann man das Ableiten der Gleichungen nach (§. 82.) ganz allgemein und ohne sich überhaupt mehr um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben zu bekümmern, bloß zwischen den Rechnungsformen selbst, statt finden lassen, weil man dadurch nicht mit der Zahl und (nach §. 98.) auch nicht mit dem, was im ersten Kapitel von der Differenz wirklicher (ganzer) Zahlen geltend gemacht worden ist, in Widerspruch gerathen kann, wenn man nur voraussetzt, daß keiner der Divisoren Null ist.

Die Gleichungen lehren dann nichts weiter als das Verhalten der 4 ersten Operationen zu einander. Und eine jede solche Gleichung lehrt dasselbe Verhalten, jedoch jede wiederum in der gerade ihr eigenthümlichen Form und Verzweigung.

§. 100. Zusatz.

Werden aber die Sätze des (§. 81.) ganz allgemein beybehalten, so liefern die (Nr. Nr. 2. und 4.) sogleich, wenn man b statt a setzt;

1) $0 \cdot c = c \cdot 0 = 0$,

2) $0 : c = 0$.

Auch hat man

3) $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$,

4) $\frac{a}{1} = a$ und 5) $\frac{a}{a} = 1$.

Und die (Nr. Nr. 2 und 6. des §. 81.), wenn man 0 statt a, oder 0 statt b setzt, geben:

$$(-b) \cdot c = 0 \cdot c - b \cdot c = 0 - bc = -b \cdot c,$$
$$a \cdot (-c) = a \cdot 0 - a \cdot c = 0 - a \cdot c = -a \cdot c;$$

also 6) $(-a) \cdot b = -a \cdot b$,

und 7) $a \cdot (-b) = -a \cdot b$;

so wie hieraus wiederum folgt:

$$(-a) \cdot (-b) = -[(-a) \cdot b] = -(-ab) = +ab = ab,$$

d. h. 8) $(-a) \cdot (-b) = +ab = ab$.

Dann folgt aus (§. 81. Nr. 4.), wenn beziehlich 0 statt a gesetzt wird,

$$\frac{-b}{c} = \frac{0-b}{c} = \frac{0}{c} - \frac{b}{c} = 0 - \frac{b}{c} = -\frac{b}{c},$$

also 9) $\frac{-a}{b} = \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$,

so wie noch

10) $\frac{a}{-b} = \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$,

und 11) $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

Die Richtigkeit der (Nr. Nr. 10. und 11.) erhellet aber aus

$$(-b) \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = +b \cdot \frac{a}{b} = a, \text{ nach (Nr. 5.),}$$

und aus $(-b) \cdot \frac{a}{b} = -b \cdot \frac{a}{b} = -a$, nach (Nr. 4.),

wenn man auf beyden Seiten noch durch $-b$ wegdividirt.

§. 101. Zusatz.

Weil zu gleicher Zeit auch noch

$$(+a)\cdot(+b) = (0+a)\cdot(0+b) = a\cdot b = +a\cdot b$$

und $$\frac{+a}{+b} = \frac{0+a}{0+b} = \frac{a}{b} = +\frac{a}{b}$$

ist, so kann man das, was die Formeln (Nr. Nr. 3 — 8. des §. 100.) lehren, im Lapidarstyl, in folgende Regeln zusammenfassen:

„Einerlei (+ oder —) Zeichen mit einander multiplizirt, oder durch einander dividirt, geben (+); verschiedene (+ oder —) Zeichen dagegen geben (—), wenn sie mit einander multiplizirt oder durch einander dividirt werden."

Und jede solche Regel ist als Gedächtniß-Hilfsmittel gehörig zu schätzen, so unbestimmt sie sich auch ausdrückt.

§. 102. Lehrsätze.

Für algebraische Summen finden aber nun zunächst folgende Sätze Platz:

1) $(a-b+c+d-e-f+g)\cdot m$

$$= am-bm+cm+dm-em-fm+gm,$$

2) $(a-b+c+d-e-f+g):m$

$$= \frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\frac{d}{m}-\frac{e}{m}-\frac{f}{m}+\frac{g}{m},$$

3) $a\cdot x-bx-cx+dx-ex+fx$

$$= (a-b-c+d-e+f)\cdot x,$$

4) $$\frac{a}{x}-\frac{b}{x}-\frac{c}{x}+\frac{d}{x}-\frac{e}{x}+\frac{f}{x} = \frac{a-b-c+d-e+f}{x},$$

welche hier noch näher erörtert werden sollen.

Lehrsatz 1. und 2. Eine algebraische Summe wird mit einem Ausdruck m multiplizirt oder dividirt, wenn man jedes Glied derselben mit m multiplizirt oder dividirt, und die

Produkte oder Quotienten mit demselben (+ oder —) Zeichen neben einander hinsetzt; d. h. es ist

$$(a-b+c+d-e-f+g)\cdot m = am-bm+cm+dm-em-fm+gm$$

und

$$(a-b+c+d-e-f+g):m = \frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\frac{d}{m}-\frac{e}{m}-\frac{f}{m}+\frac{g}{m}.$$

Beweis. Denn nach (§. 23.) ist a—b+c+d—e—f+g eine Summe aus zwey Summanden, a—b+c+d—e—f der eine, und g der zweyte. Also erhält man (nach §. 81. Nr. 1.):

$$(a-b+c+d-e-f+g)m = (a-b+c+d-e-f)m+gm.$$

Nun ist aber a—b+c+d—e—f wiederum eine Differenz, deren Minuend a—b+c+d—e und deren Subtrahend f ist; also hat man wieder nach (§. 81. Nr. 2.):

$$(a-b+c+d-e-f)m = (a-b+c+d-e)m-fm.$$

Und nun sieht man leicht, wie durch wiederholte Anwendung der (§. 81. Nr. Nr. 1 und 2.) zuletzt der Lehrsatz selbst, und zwar für jede andere algebraische Summe auf dieselbe Weise, sich ergeben muß.

Dasselbe läßt sich mit Anwendung der (§. 81. Nr. Nr. 3 und 4.) auch für die Division wiederholen.

Lehrsätze 3 und 4. Sind die Glieder einer algebraischen Summe, Produkte mit einem gemeinschaftlichen Faktor, oder Quotienten (Brüche) mit einem gemeinschaftlichen Divisor (Nenner), so kann man den gemeinschaftlichen Faktor oder Divisor (Nenner) als neuen Faktor oder Divisor (Nenner) herausetzen, und die nicht gemeinschaftlichen Faktoren oder Dividenden (Zähler), mit demselben (+ oder —) Zeichen, als neuen Faktor oder als neuen Dividenden (Zähler), neben einander hinschreiben; d. h. es ist

$$ax-bx-cx+dx-ex+fx = (a-b-c+d-e+f)\cdot x;$$

$$\frac{a}{x}-\frac{b}{x}-\frac{c}{x}+\frac{d}{x}-\frac{e}{x}+\frac{f}{x} = \frac{a-b-c+d-e+f}{x}.$$

Beweise sind bereits geführt, da sich diese Lehrsätze (3. und 4.) von denen (1. und 2.) durch nichts als durch die verschiedene Form des wörtlichen Ausdrucks von einander unterscheiden.

§. 103. Zusatz.

Um diese letztern Sätze recht oft anwenden zu können, thut man wohl, alle Ausdrücke, so oft es angeht, in Form von Produkten oder von Quotienten zu schreiben. — So wendet sich der Satz (§. 102. Nr. 3.) unmittelbar auf

$az-bz+z$ oder auch auf $az-z$, u. s. w.

an, wenn man $1.z$ statt z setzt; und es gehen diese Ausdrücke dann beziehlich in

$(a-b+1)\cdot z$ und in $(a-1)\cdot z$ über.

Eben so kann man nach (§. 46. Nr. 2.) jeden Ausdruck a leicht als Quotienten schreiben, mit beliebigem Divisor c, weil $a = \frac{a \cdot c}{c}$ ist; und dann wendet sich der Satz (§. 102. Nr. 4.) sogleich auf die Verwandlung der Ausdrücke

$$a+\frac{b}{c},\quad a-\frac{b}{c},\quad \frac{b}{c}+a,\quad \frac{b}{c}-a$$

an, so daß man erhält:

$$a+\frac{b}{c} = \frac{b}{c}+a = \frac{ac+b}{c};$$

$$a-\frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c};$$

$$\frac{b}{c}-a = \frac{b-ac}{c}.$$

Damit derselbe Lehrsatz (§. 102. Nr. 4.) auch auf algebraische Summen angewandt werden könne, deren einzelne Glieder Quotienten (Brüche) sind, die nicht gerade einerlei Divisor (Nenner) haben, darf man nur folgende Aufgabe stellen.

§. 104. Aufgabe.

Es sind mehre Quotienten (Brüche) mit verschiedenen Divisoren (Nennern) gegeben, man soll jeden einzelnen in einen

gleichbedeutenden verwandeln, so aber, daß die neuen Quotienten (Brüche) alle einerlei Divisoren (Nenner) haben.

Auflösung. Sind

$$\frac{\alpha}{a},\quad \frac{\beta}{b},\quad \frac{\gamma}{c},\quad \frac{\delta}{d},\quad \text{ꝛc.}$$

die gegebenen Quotienten (Brüche), so nehme man einen beliebigen Ausdruck N zum gemeinschaftlichen Divisor (Nenner) an, dividire mit den Nennern a, b, c, d, ꝛc. einzeln in N, und multiplizire die zugehörigen Zähler

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \text{ꝛc.}$$

mit diesen Quotienten

$$\frac{N}{a},\quad \frac{N}{b},\quad \frac{N}{c},\quad \frac{N}{d},\quad \text{ꝛc.}$$

welche beziehlich durch

$$a_1,\quad b_1,\quad c_1,\quad d_1,\quad \text{ꝛc.}$$

bezeichnet seyn mögen; und die Quotienten (Brüche)

$$\frac{\alpha \cdot a_1}{N},\quad \frac{\beta \cdot b_1}{N},\quad \frac{\gamma \cdot c_1}{N},\quad \frac{\delta \cdot d_1}{N},\quad \text{ꝛc.}$$

sind die verlangten.

Beweis. Denn ein Quotient bleibt gleichbedeutend, wenn Dividend und Divisor zugleich mit einer und derselben Zahl $\frac{N}{a}$ oder a_1, $\frac{N}{b}$ oder b_1, $\frac{N}{c}$ oder c_1 u. s. w. multiplizirt wird, nach (§. 47. Nr. 10.). Und weiter nichts als dies ist hier bey den einzelnen gegebenen Quotienten $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\gamma}{c}$ ꝛc. ꝛc. geschehen.

§. 105. Zusatz.

In den praktischen Anwendungen thut man wohl, den gemeinschaftlichen Divisor N von der einfachsten Form zu wählen. Wenn man keinen einfachen Ausdruck dazu weiß, so nimmt man zunächst das Produkt aller einzelnen Divisoren (Nenner) für N.

Auf diesem Wege erhält man sogleich

1) $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$$

2) $$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd},$$

3) $$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf-bcf+bde}{bdf},$$

4) $$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f} + \frac{g}{h} - \frac{m}{n} =$$

$$= \frac{adfhn-bcfhn-bdehn+bdfgn-bdfhm}{bdfhn},$$

u. s. w. f.

§. 106. Zusatz.

Haben die einzelnen Divisoren (Nenner) bereits gemeinschaftliche Faktoren, so kann man am bequemsten statt N nehmen das Produkt der nicht gemeinschaftlichen Faktoren, und der vorher herausgesetzten gemeinschaftlichen Faktoren.

Sind z. B. die einzelnen Divisoren (Nenner)

am, bn, cmn, dmmm, enn,

so nehme man N = abcdemmmmnn. Es wird nämlich der gemeinschaftliche Faktor m herausgesetzt aus am, cmn, dmmm, so daß noch bleibt

a, bn, cn, dmm, enn.

Hernach wird noch herausgesetzt der gemeinschaftliche Faktor n aus bn, cn, enn, so daß noch bleibt

a, b, c, dmm, en.

Und nun wird das Produkt der nicht gemeinschaftlichen Faktoren a, b, c, dmm, en, und der herausgesetzten gemeinschaftlichen Faktoren m und n für N genommen.

Beyspiele. So findet sich

$$\frac{a}{bm} + \frac{c}{m} = \frac{a+bc}{bm},$$

$$\frac{a}{bm} - \frac{c}{mn} + \frac{d}{pn} = \frac{apn - bcp + bdm}{bmnp},$$

$$\frac{48}{2\cdot2} - \frac{10}{2} + \frac{54}{2\cdot3} + \frac{32}{2\cdot2\cdot2} - \frac{72}{3\cdot3}$$

$$= \frac{48\cdot2\cdot3\cdot3 - 10\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3 + 54\cdot2\cdot2\cdot3 + 32\cdot3\cdot3 - 72\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3}.$$

§. 107. Lehrsatz.

Zwey algebraische Summen werden mit einander multiplizirt, wenn man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern multiplizirt, den einzelnen Produkten das (+ oder —) Zeichen vorsetzt, je nachdem die einzelnen Faktoren einerlei oder verschiedene (+ oder —) Zeichen vor sich stehen haben, und zuletzt alle die so entstehenden additiven und subtraktiven Ausdrücke neben einander in beliebiger Ordnung hinschreibt; d. h. es ist z. B.

$$(a-b+c+d-e)(-m-n+p) = -am+bm-cm-dm$$
$$+em-an+bn-cn-dn+en+ap-bp+cp+dp-ep.$$

Beweis. Denn es ist nach (§. 102. Nr. 1. und §. 100. Nr. 4.):

$$(a-b+c+d-e)(-m-n+p) = -(a-b+c+d-e)m-$$
$$(a-b+c+d-e)n+(a-b+c+d-e)p.$$

Und wiederum, nach demselben Satze:

$$(a-b+c+d-e)m = am-bm+cm+dm-em,$$
$$(a-b+c+d-e)n = an-bn+cn+dn-en,$$

welche Produkte jedoch subtrahirt sind, so daß nach (§. 38.) die einzelnen Glieder mit dem entgegengesetzten (+ oder —) Zeichen hingeschrieben werden müssen. Endlich ist noch

$$(a-b+c+d-e)p = ap-bp+cp+dp-ep,$$

welches, wie oben zu sehen, noch addirt werden muß. Dann kommt aber das Resultat der Multiplikation genau so, wie solches obige praktische Regel des Lehrsatzes es ebenfalls liefert.

Anmerkung. Im Praktischen, wo gewöhnlich noch der Nebenzweck statt findet, die Resultate in der einfachsten Form zu liefern, wird man

jede erhaltene algebraische Summe durchmustern, und nachsehen, ob sich nicht mehre Glieder nach der Regel des (§. 35.) bequem in ein einziges zusammenfassen lassen.

§. 108. Lehrsatz.

Zwey algebraische Summen werden durch einander dividirt (d. h. der nach (§. 44.) erhaltene Quotient derselben, wird selber wieder in eine algebraische Summe verwandelt), wenn man die Formel des (§. 84.) in Anwendung bringt, und den Quotienten zuerst in eine Summe von zwey Summanden verwandelt; dann den zweyten Summanden, der selber wieder ein Quotient ist, nach derselben Formel des (§. 84.) auf's neue in eine Summe von zwey Summanden umformt, und so dieselbe Formel so oft hinter einander anwendet, bis zuletzt der zweyte Summand kein Quotient mehr wird, oder (wenn dies nicht werden kann) so oft anwenden, als es gegebenen Zwecken entspricht.

Weil jedoch der erste Summand dem (§. 84.) gemäß, jedesmal willkürlich seyn kann, so wird man unendlich viele verschiedene Formen algebraischer Summen erhalten, die alle einander gleich seyn müssen. Von allen diesen Resultaten erhält man jedoch, in der Regel sogleich das einfachste, wenn man jedesmal den ersten Summanden dadurch bestimmt, daß man ein Glied des Dividenden durch ein Glied des Divisors dividirt.

Beyspiel. So findet sich nach diesem Lehrsatze:

$$\frac{-am+bm+cm-dm+an-bn-cn+dn}{-m+n}$$

$$= -c+\frac{-am+bm-dm+an-bn+dn}{-m+n}$$

$$= -c+a+\frac{bm-dm-bn+dn}{-m+n}$$

$$= -c+a+(-b)+\frac{-dm+dn}{-m+n}$$

$$= -c+a+(-b)+d+0$$

$$= -c+a-b+d = a-b-c+d.$$

Und im Praktischen nimmt sich die Arbeit so aus:

Divisor	Dividend	Quotient
$-m+n$	$-am+bm+cm-dm+an-bn-cn+dn$	a
	$-am+an$	
	$bm+cm-dm-bn-cn+dn$	$-b$
	$bm-bn$	
	$cm-dm-cn+dn$	$-c$
	$cm-cn$	
	$-dm+dn$	$+d$
	$-dm+dn$	
	0	

§. 109. Lehrsatz.

Jeder durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ganz beliebig aus wirklichen Zahlen zusamengesetzte Ausdruck ist allemal einem Differenz-Quotienten $\frac{A}{B}$ gleich, dessen Dividend A und Divisor B, Differenzen zweyer wirklichen Zahlen (d. h. selbst eine wirkliche ganze Zahl, oder Null oder eine negative (ganze) Zahl) sind.

Beweis. Wenn man wirkliche Zahlen addirt und subtrahirt, beliebig viele, beliebig wie, so bekommt man nach (§. 39. 40.) doch immer Differenzen ganzer Zahlen. Multiplizirt man nun ein Paar dieser Resultate mit einander, so erhält man abermals Differenzen ganzer Zahlen. Dividirt man zwey solche Resultate durcheinander, so bekommt man Differenzquotienten, welche jede Differenz ganzer Zahlen ebenfalls als einen besondern Fall in sich schließen. Verbindet man endlich ein Paar solcher Differenzquotienten, mit einander, durch Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division, so erhält man nach (§. 105. und §. 74.) allemal wieder solche Differenzquotienten. Also ergeben sich ohne Ende fort, immer nur solche Differenzquotienten.

§. 110. Zusatz.

Schließt man, wie immer, die Nenner aus, welche Null sind, so hat jeder Differenzquotient $\frac{A}{B}$ nothwendig eine von den Formen

$$\frac{+\alpha}{+\beta},\quad \frac{0}{+\beta},\quad \frac{-\alpha}{+\beta},\quad \frac{+\alpha}{-\beta},\quad \frac{0}{-\beta}\quad \text{und}\quad \frac{-\alpha}{-\beta},$$

wo α und β wirkliche (ganze) Zahlen sind. Und diese 6 Formen reduziren sich nach (§. 100.) auf

$$+\frac{\alpha}{\beta}, \quad 0 \quad \text{und} \quad -\frac{\alpha}{\beta},$$

wo jedoch $\frac{\alpha}{\beta}$ eine ganze, und auch eine gebrochene Zahl seyn kann.

§. 111. Erklärung und Zusatz.

Nennen wir +a eine positive (ganze oder gebrochene) Zahl und —a eine negative (ganze oder gebrochene) Zahl, wenn wir andeuten wollen, daß a selbst nicht mehr allgemein seyn soll, sondern daß unter a eine ganze oder eine gebrochene Zahl gedacht wird; so folgt, daß alle bis jetzt möglichen speziellen Rechnungsformen sich auf folgende fünfe zurückführen lassen, nämlich auf 1) die positive ganze Zahl, 2) die positive gebrochene Zahl, 3) die negative ganze Zahl, 4) die negative gebrochene Zahl, endlich 5) die Null.

Diese 5 bis jetzt möglichen speziellen Zahlformen nennt man auch reele Zahlen, und alle in der Folge durch das Verallgemeinern der Wurzeln und Logarithmen (§. 3.) noch entstehenden speziellen Zahlformen, welche nicht auf reele gebracht werden können, werden imaginäre Zahlen genannt. — Der Differenzquotient $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}$, wenn α, β, γ, δ noch ganz beliebige wirkliche Zahlen bedeuten, enthält alle möglichen reelen Zahlen. — Die ganzen und gebrochenen Zahlen, wenn sie weder ein (+) noch ein (—) Zeichen vor sich stehen haben, also die (§. 71.) definirten, heißen auch absolute Zahlen (auch abstrakte Zahlen).

Die absolute ganze Zahl ist endlich diejenige, von welcher wir allein ausgehen konnten, und die wir, so wie bisher, so in der Folge, wirkliche Zahl nennen, in so ferne alle übrigen so genannten Zahlen nichts als Zahlenbegriffe oder Zahlformen sind, aus der Verbindung der wirklichen Zahlen hervorgegangen.

§. 112. Erklärung.

Bedeuten a und b zwey beliebige reele Zahlen, so sagt man „a sey grösser als b" oder „b sey kleiner als a", und schreibt dies so:

$$a > b \quad \text{oder} \quad b < a,$$

wenn a—b positiv oder b—a negativ ist.

Beyspiele. Dieser Definition zu Folge ist also

$$8 > 3,\ 1 > \tfrac{3}{5},\ 3 > 0,\ \tfrac{2}{3} > -1,\ -2 > -5,\ \tfrac{3}{4} > \tfrac{2}{3},\ -\tfrac{3}{4} < -\tfrac{2}{3},\ 0 > -\tfrac{3}{2},$$

u. s. w. f.

§. 113. Zusatz.

Sind a und b und m beliebige reele Zahlen, und $a > b$ d. h. a—b positiv, so ist offenbar

$(a+m)-(b+m) = (a-m)-(b-m)[= a-b]$ noch immer positiv; dagegen $(m-a)-(m-b)[= b-a]$ nothwendig negativ.

Ferner ist $am-bm[=(a-b)m]$ und $\frac{a}{m} - \frac{b}{m}\left[= \frac{a-b}{m}\right]$ positiv, wenn m positiv, dagegen negativ, wenn m negativ ist. Endlich ist $\frac{m}{a} - \frac{m}{b}\left[= \frac{mb-ma}{ab} = \frac{m(b-a)}{ab}\right]$ positiv, wenn $\frac{m}{ab}$ negativ ist, dagegen negativ, wenn $\frac{m}{ab}$ positiv ist.

Dieselben Resultate können auch mit folgenden Worten gegeben werden:

Ist $a > b$,

so ist allemal 1) $a+m > b+m$,

2) $a-m > b-m$,

3) $m-a < m-b$.

Dagegen ist 4) $am \gtrless bm$, je nachdem m $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist,

und 5) $\frac{a}{m} \lessgtr \frac{b}{m}$, je nachdem m $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist.

Endlich ist 6) $\frac{m}{a} \lessgtr \frac{b}{m}$, je nachdem $\frac{m}{ab}$ $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist.

Anmerkung. Sind a und b beyde positiv oder beyde negativ, so ist ab positiv, und dann ist $\frac{m}{a} \lessgtr \frac{m}{b}$, je nachdem m $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, wenn nur $a > b$ angenommen wurde.

§. 114. Zusatz.

Sind a, b, c beliebige reele Zahlen, und ist

$$a > b \quad \text{und} \quad b > c,$$

so ist auch

$$a > c.$$

Denn da a—b und b—c positiv sind, so ist auch ihre Summe (a—b)+(b—c) d. h. a—c positiv.

§. 115. Zusatz.

Sind a, b, c, d beliebige reele Zahlen, und ist

$$a > b \quad \text{und auch} \quad c > d,$$

so ist nothwendig 1) $a+c > b+d$

und 2) $a-d > b-c$.

Denn es ist a—b und c—d, also auch ihre Summe

$$(a-b)+(c-d) = (a+c)-(b+d) = (a-d)-(b-c) = (a-b)-(d-c)$$

positiv.

Dagegen ist

4) $ac > bd$, wenn b und c positiv sind, (wo dann a nothwendig auch positiv seyn muß, weil sonst nicht $a > b$ seyn könnte); aber

5) $ac < bd$, wenn b und c beyde negativ sind.

Denn es folgt nach (§. 113. Nr. 4.)

aus $a > b$, daß $ac \gtrless bc$, wenn c $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$,

und aus $c > d$, daß $bc \gtrless bd$, wenn b $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\\text{negativ}\end{matrix}\right\}$,

und so geht aus (§. 114.) die hiesige Behauptung hervor.

Sind endlich a und b beyde positiv, so ist nothwendig, wenn $a > b$ vorausgesetzt wird, auch

$$aa > bb,$$
$$aaa > bbb,$$
$$aaaa > bbbb,$$
$$a^m > b^m,$$

wenn wir, der Kürze wegen, unter m die Anzahl der Faktoren a oder b uns denken, d. h. unter p^m das Produkt $p \cdot p \cdot p \cdot p \cdots$, in welchem der Faktor p, mmal vorkommt.

Anmerkung. Sind dagegen a und b beyde negativ, und dabey $a > b$, so ist dann

$$aa < bb,$$
$$aaa > bbb,$$
$$aaaa < bbbb,$$
$$aaaaa > bbbbb,$$
$$aaaaaa < bbbbbb,$$

also $a^m > b^m$, wenn m kein Vielfaches von 2,
und $a^m < b^m$, wenn m ein Vielfaches von 2 ist.

§. 116. Zusatz.

Ferner folgt noch, wenn a und b positiv sind:

1) Ist $a > b$, so ist auch:

$$\frac{a}{b} > \frac{b}{b} \text{ und } \frac{b}{a} < \frac{a}{a} \text{ d. h.}$$

$$\frac{a}{b} > 1 \text{ und } \frac{b}{a} < 1.$$

2) Ein ächter Bruch ist daher immer kleiner als 1, ein unächter Bruch dagegen immer größer als 1.

3) Von zwey Brüchen, welche gleiche Nenner haben, ist derjenige der größeste, welcher den größesten Zähler hat. — Ein ähnliches von Quotienten überhaupt, deren Dividenden und Divisoren ganzen oder gebrochenen oder gemischten Zahlen gleich sind. — Solche Quotienten der letztern Art nennt man wohl auch Bruchsbrüche.

4) Von zwey Brüchen, die gleiche Zähler haben, ist derjenige der größeste, der den kleinsten Nenner hat. — Ein ähnliches von Bruchsbrüchen.

5) Von zwey Brüchen ist derjenige der größeste, welcher den größesten Zähler, dagegen den kleinsten Nenner hat. — Ein ähnliches von Bruchsbrüchen.

6) Das Produkt zweyer oder mehrer ächten Brüche ist kleiner als jeder der Faktoren.

7) Das Produkt zweyer oder mehrer unächten Brüche oder gemischten Zahlen *) ist aber immer größer als jeder der Faktoren.

§. 117. Aufgabe.

Es wird ein vorläufig durch x bezeichneter Ausdruck gesucht, welcher die Eigenschaft hat, daß zwey aus ihm und beliebigen andern Ausdrücken a, b, c, d, e, f, ꝛc. ꝛc. zusammengesetzte Ausdrücke A und B einander gleich werden.

Auflösung. 1) Man multiplizire jede Seite A und B der Gleichung $A = B$, mit den vorkommenden Nennern oder mit dem Produkt aller Nenner, oder mit irgend einer andern dazu geeigneten Zahl, so lange, bis eine neue Gleichung hervorgeht, welche keine Quotienten mehr enthält, oder in welcher wenigstens der gesuchte Ausdruck x nicht mehr mit andern durch Division verbunden ist. — Dabey wendet man die Formeln

$$\frac{a}{b} \cdot b = a; \quad \frac{a}{b} m = \frac{am}{b};$$

$$\frac{a}{b} \cdot m = \frac{a}{b:m}; \quad \text{am häufigsten aber die Formel}$$

$$\frac{a}{b} m = \frac{m}{b} \cdot a \text{ an.}$$

2) Diese entstandene Gleichung $C = D$ wird sich nun sogleich dergestalt umändern lassen, daß C und D algebraische Summen sind, deren Glieder Produkte sind, oder doch in Form von Produkten gedacht werden können, wenn man z. B. $1 \cdot x$

---

*) Unter einer gemischten Zahl versteht man eine Summe $a + \frac{b}{c}$, aus einer ganzen Zahl a und einem ächten Bruch $\frac{b}{c}$.

statt x gesetzt sich denkt. In dieser Gleichung schaffe man dann nach (§. 41.) alle, x nicht enthaltenden Glieder auf die eine Seite, und alle, x enthaltenden auf die andere.

3) Nimmt man dann nach (§. 102. Nr. 3.) alle mit x multiplizirten Glieder, in ein einziges von der Form $\beta \cdot x$; hernach auch alle mit $x \cdot x$ multiplizirten Glieder in ein einziges zusammen, nach derselben (Nr. 3. §. 102.), von der Form $\gamma \cdot xx$; ferner alle $x \cdot x \cdot x$ enthaltenden Glieder in eins von der Form $\delta \cdot xxx$, u. s. w. f. zusammen, so wird die entstehende Gleichung so aussehen

$$\beta x + \gamma xx + \delta xxx + \text{ꝛc.} = \alpha,$$

wenn α das aus allen, x nicht enthaltenden Gliedern zusammengesetzte Glied der andern Seite vorstellt. — Und so oft man eine Gleichung von dieser letztern Form erhalten hat, sagt man, die gegebene Gleichung wäre nach x geordnet.

4) Ist nun nicht $\gamma = 0 = \delta = \text{ꝛc.}$, d. h. reduzirt sich die Gleichung nicht auf die einfache Form

$$\beta x = \alpha,$$

so muß die Auflösung späteren Kapiteln vorbehalten bleiben. — Reduzirt sie sich aber auf

$$\beta x = \alpha,$$

so dividire man noch durch β auf beyden Seiten, und man erhält

$$x = \frac{\alpha}{\beta};$$

und $\frac{\alpha}{\beta}$ ist nun der gesuchte Ausdruck.

Beweis ist denen der (§. §. 16. 17.) gemäß zu führen.

Beyspiele.

1) Aus $(a+x)(b+x)-a(b+c) = \frac{aac}{b}+xx$,

folgt $x = \frac{ac}{b}$.

2) Aus

2) Aus $c-ax = d-bx$ folgt $x = \frac{c-d}{a-b} = \frac{d-c}{b-a}$,

und $a = \frac{c-d+bx}{x}$, und $b = \frac{d-c+ax}{x}$.

3) Aus $-x = a + \frac{bc}{d} - \frac{cfx}{de}$ folgt $x = \frac{(ad+bc)e}{cf-de}$.

4) Aus $\frac{ax}{b} - cx - d = a - \frac{bx}{a} - \frac{5x}{2a} + \frac{x}{3b}$

folgt $x = \frac{2 \cdot 3\ ab\ (a+d)}{2 \cdot 3aa - 2 \cdot 3abc + 2 \cdot 3bb - 2a + 3 \cdot 5b}$.

5) Aus $\frac{ffx}{cg} - \frac{aa}{f} + cx = \frac{hx}{g} - c + (a+c)x$

folgt $x = \frac{(aa-cf)cg}{(ff-ch-acg)f}$.

6) Aus $\frac{cx}{c-dx} - \frac{c+bcx}{a-bx} = c - \frac{d-cx}{c-dx}$

folgt $x = \frac{(a+1)cc-ad}{[(a+1)c-b] \cdot d}$.

7) Aus $\frac{d}{c-dx} - c\frac{1+bx}{a-bx} = c$,

folgt $x = \frac{(a+1)cc-ad}{[(a+1)c-b]d}$.

8) Aus $u = a+(n-1)d$

folgt $a = u-(n-1)d$; $d = \frac{u-a}{n-1}$ und $n = \frac{u-a}{d} + 1$.

9) Aus $s = \frac{a+u}{2} \cdot n$

folgt $n = \frac{a+u}{2s}$; $a = \frac{s-nu}{n}$ und $u = \frac{2s-na}{n}$.

10) Aus $s = [2a+(n-1)d] \cdot \frac{n}{2}$

folgt $d = \frac{2s-2an}{n(n-1)}$ und $a = \frac{2s-n(n-1)d}{2n}$;

und nach n geordnet wird sie

$$n \cdot n + (2a-d)n = 2s,$$

so daß die Auffindung des Ausdrucks, welcher für n gesetzt werden muß, wenn die gegebene Gleichung $s = [2a+(n-1)d] \cdot \frac{n}{2}$ richtig seyn soll, was auch s, a, d vorstellen mögen, einem späteren Kapitel überlassen bleiben muß.

11) Aus $\frac{1}{x} = bc+d+\frac{ab}{x}$

folgt $x = \frac{1-ab}{bc+d}$.

12) Aus $cd - \frac{aax}{b-c} + bx + ac = 0$

folgt $x = \frac{c(a+d)(b-c)}{aa-b(b-c)}$.

13) Aus $c = a + \frac{m(a+x)}{3a-x}$ folgt $x = \frac{a(3c-3a-m)}{c+m-a}$.

14) Aus $-\frac{a(dd+xx)}{dx} = ac - \frac{ax}{d}$ folgt $x = -\frac{d}{c}$.

15) Aus $x+y = axy$ folgt $x = \frac{y}{ay-1}$; $y = \frac{x}{ax-1}$.

16) Aus $x-z = bxyz$ folgt

$x = \frac{z}{1-byz}$; $z = \frac{x}{1+bxy}$ und $y = \frac{x-z}{bxz}$.

17) Aus $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$ folgt $x = \frac{y}{ay-1}$ und $y = \frac{x}{ax-1}$.

18) Aus $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = a$ folgt $x = \frac{y}{ay+1}$ und $y = \frac{x}{1-ax}$.

§. 118. Zusatz.

Sollte β ebenfalls 0 seyn, so darf das gefundene Resultat $x = \frac{\alpha}{\beta}$ in diesem Falle nicht als das nothwendig richtige beibehalten werden (nach §. 96.). Geht man aber bis dahin zurück, wo noch nicht durch β (d. h. jetzt durch Null) dividirt ist, nämlich zur Gleichung

$$\beta x = \alpha,$$

die noch richtig seyn muß, so sieht man, wie sie sich jetzt auf $0 \cdot x = \alpha$, d. h. auf $0 = \alpha$ reduzirt. — Ist nun α nicht Null, so enthält sie einen Widerspruch, und ein Ausdruck x wie er gesucht wird, existirt dann nicht. — Ist aber α wirklich 0 (Null), so zeigt die Gleichung $\beta x = \alpha$ (jetzt $0 \cdot x = 0$) an, daß man für x jeden beliebigen Ausdruck nehmen kann, (er müßte denn noch

andern, als den in der Gleichung $\beta x = \alpha$ ausgesprochenen Eigenschaften zu genügen haben).

Wenn daher der allgemeine Ausdruck $\frac{\alpha}{\beta}$ für x, in die Form $\frac{\alpha}{0}$ übergeht, so zeigt dies einen Widerspruch an, also daß es keinen Ausdruck für x gibt, welcher den in der Gleichung ausgesprochenen Bedingungen entspricht. — Und geht der allgemeine Ausdruck $\frac{\alpha}{\beta}$ für x, in die Form $\frac{0}{0}$ über, so zeigt dies an, daß die gegebene Gleichung an sich schon richtig ist, und richtig bleibt, man mag für x setzen, welchen Ausdruck man nur immer dafür nehmen will.

Beyspiele. 1) Wird der Ausdruck x gesucht, welcher die Eigenschaft hat, daß wenn man ihn mit a, dann denselben auch mit b multiplizirt, das letztere Produkt bx, nebst x selbst, von dem erstern ax subtrahirt, dann die Differenz ax—bx—x durch x dividirt, zuletzt die Zahl c sich ergibt, so hat man die Gleichung

$$\frac{ax-bx-x}{x} = c,$$

welche in $ax-bx-x = cx,$
d. h. in $(a-b-1-c)x = 0$
übergeht, und

$$x = \frac{0}{a-b-1-c}$$

liefert. — Ist nun nicht $a-b-1-c = 0$ gegeben, so wird $x = 0$; und dieser Ausdruck genügt der Gleichung $ax-bx-x = cx$,
weil sie dann in $(a-b-1).\ x = c \cdot x$,
also in $0 = 0$ übergeht.
Nicht aber genügt der Werth $x = 0$ der gegebenen Gleichung

$$\frac{ax-bx-x}{x} = c \quad \text{selbst,}$$

weil dann Null im Nenner vorkommt, und solche Ausdrücke nirgends betrachtet werden dürfen, d. h. als den allgemeinen Gesetzen der Operationen nicht unterworfen, angesehen worden sind. — Ist aber $a-b-1-c = 0$, so zeigt das Resultat $x = \frac{0}{0}$ nun an, daß man vorher $0 \cdot x = 0$ hatte, also selbst schon eine richtige Gleichung; also daß solche richtig verbleibt, man mag für x setzen, was man nur immer will.

2) Wäre der Ausdruck x gesucht, welcher 0 gibt, wenn a durch ihn dividirt wird, so hätte man $\frac{a}{x} = 0$, $a = 0 \cdot x$, $x = \frac{a}{0}$; und dieses Resultat zeigt an, daß unter der Voraussetzung, daß a selbst nicht Null ist, ein solcher Ausdruck x nicht existirt.

Anhang zum dritten Kapitel.

Dritte Anwendung der (hier entwickelten) Lehren der Zahlenlehre auf die allgemeine Größenlehre.

22. Lehrsatz.

Sind aE und bE zwey ganze oder gebrochene benannte Zahlen, so ist

$$1)\quad aE + bE = (a+b)\cdot E$$
$$2)\quad aE - bE = (a-b)\cdot E.$$

Beweis. Für ganze Zahlen a und b ist der Satz (im Anhange zum 1ten Kapitel Nr. 4.) bereits als wahr anerkannt. Ist aber $a = \frac{\alpha}{\beta}$ und $b = \frac{\gamma}{\delta}$, und sind dabey $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ entweder ganze oder gebrochene Zahlen, so denke man sich eine neue Einheit E_1, so daß

$$E = (\beta\delta)E_1 \text{ ist,}$$

so ist $$aE = \left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\delta\right)E_1 = (\alpha\delta)E_1$$

und $$bE = \left(\frac{\gamma}{\delta}\cdot\beta\delta\right)E_1 = (\beta\gamma)E_1;$$

demnach

$$aE + bE = (\alpha\delta+\beta\gamma)E_1 = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}E = \left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}\right)E;$$

und eben so

$$aE - bE = (\alpha\delta-\beta\gamma)E_1 = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\beta\delta}E = \left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}\right)E;$$

so daß beyde Behauptungen außer Zweifel gestellt sind.

Anmerkung. Was im Anhange zum 1ten Kapitel für negative ganze benannte Zahlen gesagt ist, kann nun auch für negative ganze oder gebrochene benannte Zahlen wiederholt werden; was jedoch, da solches keinen praktischen Nutzen gewährt, unterbleiben mag.

23. Erklärung.

Hat man zwey Größen A und B, als gleichbenannte ganze oder gebrochene Zahlen aE und bE ausgedrückt, so nennen wir A gleich B, oder wir sagen A ist größer als B, wenn $a = b$ oder $a > b$ ist; und im letztern Fall schreiben wir auch: es sey $A > B$.

Anmerkung. Dieselben Größen A und B, welche durch aE und bE vorgestellt sind, können aber auch, auf eine andre Einheit E_1 bezogen, durch die benannten Zahlen αE_1 und βE_1 ausgedrückt seyn. Allein da $aE = \alpha E_1$ ist, so ist $E = \frac{\alpha}{a} E_1 = mE_1$ wenn $\frac{\alpha}{a}$ durch m vorgestellt wird; und dann ist $aE = (am)E_1$, $bE = (bm)E_1$, aber auch $bE = \beta E_1$ d. h. $am = \alpha$ und $bm = \beta$; und eben deswegen ist allemal

$$\alpha = \beta, \quad \text{wenn} \quad a = b$$

und

$$\alpha > \beta, \quad \text{wenn} \quad a > b \text{ ist;}$$

so daß also die gleiche oder größere unbenannte Zahl, auch allemal die gleiche oder größere Größe beurkundet, auf welche Einheit die, diese Größen vorstellenden gleichbenannten Zahlen sich auch immer beziehen mögen.

24. Erklärung.

Sind E, E_1, E_2, E_3, ꝛc. mehre Einheiten (Größen), so daß $E = \alpha E_1$, $E_1 = \beta E_2$, $E_2 = \gamma E_3$, u. s. w. f. und α, β, γ, ꝛc. gegebene ganze (auch gebrochene) Zahlen sind, so kann eine Größe A auch so ausgedrückt erscheinen, nämlich

$$A = aE + bE_1 + cE_2 + dE_3;$$

und einen solchen Ausdruck nennt man eine zusammengesetzte benannte Zahl, während die bisherige Form z. B. αE die einfache benannte Zahl genannt wird.

25. Zusatz.

Es schließen sich aber hier zunächst die beyden Aufgaben an:

1) Die zusammengesetzte benannte Zahl $aE+bE_1+cE_2+dE_3$ in eine einfache zu verwandeln.

2) Umgekehrt, eine einfache benannte Zahl z. B. pE_3 in eine zusammengesetzte zu verwandeln. — Die erstere dieser Aufgaben ist erledigt, so bald man sich erinnert, daß

$$aE = (a\alpha)E_1 = (a\alpha\beta)E_2 = (a\alpha\beta\gamma)E_3$$
$$bE_1 = (b\beta)E_2 = (b\beta\gamma)E_3$$
$$cE_2 = (c\gamma)E_3$$

und daß, weil auch $E_3 = \frac{1}{\gamma}E_2$, $E_2 = \frac{1}{\beta}E_1$, $E_1 = \frac{1}{\alpha}E$ ist,

$$bE_1 = \frac{b}{\alpha}E; \qquad cE_2 = \frac{c}{\beta}E_1 = \frac{c}{\alpha\beta}E$$
$$dE_3 = \frac{d}{\gamma}E_2 = \frac{d}{\beta\gamma}E_1 = \frac{d}{\alpha\beta\gamma}E$$

seyn müsse. — Man hat dann sogleich

$$aE+bE_1+cE_2+dE_3 = (a\alpha\beta\gamma+b\beta\gamma+c\gamma+d)E_3$$
$$=\Big([(a\alpha+b)\beta+c]\cdot\gamma+d\Big)E_3 = \Big[(a\alpha+b)\beta+c+\frac{d}{\gamma}\Big]E_2$$
$$= \Big(a\alpha+b+\frac{c\gamma+d}{\beta\gamma}\Big)E_1 = \Big[a+\frac{(b\beta+c)\gamma+d}{\alpha\beta\gamma}\Big]E.$$

Was die zweite dieser Aufgaben betrifft, so kann man (nach §. 84.) $\frac{p}{\gamma} = q+\frac{d}{\gamma}$, also $p = q\gamma+d$ leicht finden; und dann hat man

$$pE_3 = (q\gamma+d)E_3 = (q\gamma)E_3+dE_3 = qE_2+dE_3.$$

Aber eben so kann man wieder $\frac{q}{\beta} = r+\frac{c}{\beta}$ oder $q = r\beta+c$ finden, und dann auch

$$qE_2 = rE_1+cE_2; \quad \text{also} \quad pE_3 = rE_1+cE_2+dE_3.$$

Dann kann man wieder, immer nach (§. 84.),

$\frac{r}{\alpha} = a + \frac{b}{\alpha}$, $r = a\alpha + b$, $rE_1 = aE + bE_1$, demnach $pE_3 = aE + bE_1 + cE_2 + dE_3$ finden.

26. Lehrsatz.

Sind mehre Größen-Verhältnisse einander gleich

$$A:B = C:D = E:F = G:H = \text{ꝛc. ꝛc.}$$

so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein beliebiges Vorderglied zu seinem Hintergliede; d. h. es ist dann allemal

$$(A+C+E+G):(B+D+F+H) = A:B = C:D = \text{ꝛc.}$$

Beweis. Denn es ist nach den Voraussetzungen

$$A:A = B:B$$
$$C:A = D:B$$
$$E:A = F:B$$
$$G:A = H:B$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

also, wenn man links und rechts addirt

$$(A+C+E+G):A = (B+D+F+H):B$$

d. h. $(A+C+E+G):(B+D+F+H) = A:B$.

Anmerkung. Dieser Satz gibt in seiner Anwendung die Gesellschafs- und die Theilungs-Rechnung.

Zahlenlehre.

Viertes Kapitel.

Anwendung der bisher aufgestellten allgemeinen Gesetze der Zahlenverbindungen der ersten und der zweyten Art, zur Auffindung besonderer Eigenschaften der Zahlen selbst.

Wir kehren nun zu den Zahlen der Zahlenreihe zurück und setzen voraus, daß alle in diesem Kapitel vorkommenden Zahlen wirkliche sind, d. h. ganze Zahlen (§. 71.); es müßte denn ausdrücklich das Gegentheil angemerkt seyn.

§. 119. Erklärung.

Die durch das Produkt

$$ab$$

bezeichnete Zahl nennt man ein Vielfaches (und zwar das bfache) von a, und auch ein Vielfaches (das afache) von b.

Eine Zahl a nennt man durch eine andere Zahl b theilbar, wenn der Quotient $\frac{a}{b}$ ein wirkliches Zahlzeichen, d. h. eine ganze Zahl ist (§. 71.); oder, was dasselbe ist, wenn es eine ganze Zahl c gibt, so daß $cb = a$. Die Zahl b nennt man das Gemäß oder den Theiler, die Zahl c oder $\frac{a}{b}$ aber, das Maaß von a für den Theiler b.

Anmerkung. Was ich hier Gemäß nannte, heißt gewöhnlich Maaß, worauf ich daher hier noch besonders aufmerksam mache.

§. 120. Zusatz.

Ist a durch b theilbar, so ist a ein Vielfaches von b. Umgekehrt: ist a ein Vielfaches von b, so ist a durch b theilbar.

§. 121. Zusatz.

Es geht auch noch hervor:

1) Die Summe und die Differenz zweyer durch m theilbaren Zahlen, ist ebenfalls durch m theilbar.

2) Das Produkt, dessen einer Faktor eine durch m theilbare Zahl ist, ist ebenfalls eine durch m theilbare Zahl.

3) Jede Zahl ist durch 1 theilbar.

4) Jede Zahl ist durch sich selber theilbar und zugleich ihr größter Theiler.

5) Ist c durch b und b wieder durch a theilbar, so ist auch c durch a theilbar, so wie auch das Maaß $\frac{c}{a}$ theilbar durch das Maaß $\frac{c}{b}$ und auch durch das Maaß $\frac{b}{a}$.

6) Ist c durch a und durch b theilbar, und auch das Maaß $\frac{c}{a}$ durch das Maaß $\frac{c}{b}$ theilbar, so ist auch b durch a theilbar.

7) Ist jede der Zahlen a, b, c, ꝛc. durch m, und m wieder durch n theilbar, so ist auch jede der Zahlen a, b, c, ꝛc. durch n theilbar.

8) Ist c durch b und b wieder durch jede der Zahlen m, n, p, ꝛc. theilbar, so ist auch c durch jede der Zahlen m, n, p, ꝛc. theilbar; und die Maaße $\frac{c}{m}$, $\frac{c}{n}$, $\frac{c}{p}$ ꝛc. sind alle durch das Maaß $\frac{c}{b}$ theilbar.

9) Das Produkt m·n·p··· ist durch jeden der Faktoren m, n, p, ꝛc. theilbar, so wie auch durch das Produkt aus einer beliebigen Zahl der Faktoren z. B. durch mn, mp, ꝛc.

10) Auch das Produkt a·mnp ꝛc. ist durch jede der Zahlen m, n, p, ꝛc. theilbar. — Es lassen sich daher unbestimmbar viele Zahlen denken, die größer sind, als das Produkt m, n, p, ꝛc., und dabey durch jede der Zahlen m, n, p, ꝛc. theilbar sind.

Anmerkung. Man beweißt alle diese Sätze aus den allgemeinen Formeln des 3ten Kapitel, höchst einfach, den gegebenen Begriffen getreu.

§. 122. Erklärung.

Jedes Vielfache von zwey, heißt eine gerade Zahl. Jede ganze Zahl, welche keine gerade ist, nennt man eine ungerade.

§. 123. Zusatz.

1) Das Produkt 2n gibt alle gerade Zahlen, so wie die Summe 2n+1 alle ungeraden, wenn n eine jede ganze Zahl, im letztern Fall auch noch Null bedeutet.

2) Eine ungerade Zahl ist nie durch eine gerade theilbar; wohl aber umgekehrt.

3) Die Summe, die Differenz und das Produkt zweyer geraden Zahlen, ist immer eine gerade Zahl.

4) Die Summe und die Differenz zweyer ungeraden Zahlen ist ebenfalls eine gerade Zahl, dagegen das Produkt derselben ungerade.

5) Die Summe und die Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl ist immer ungerade; ihr Produkt dagegen gerade.

6) Auch ist noch

$$(-a)\cdot(-b)\cdot(-c)\cdot(-d)\cdots = \pm abcd\cdots,$$

wo das obere oder das untere (+) oder (—) Zeichen gilt, je nachdem die Anzahl der subtraktiven Faktoren gerade oder ungerade ist.

§. 124. Erklärung.

Ist a durch b nicht theilbar, so gibt es immer zwey auf einander folgende Zahlen, q und q+1, so daß

$$qb < a \quad \text{und} \quad (q+1)b > a,$$

wenn nur $a > b$ ist. — Diese Zahl q nenne ich den nächst kleinsten, so wie q+1 den nächstgrößten Quotienten der beyden Zahlen a und b. — Die Differenz $a - bq$ heißt der Rest.

Im Falle $a < b$, hieße 0 der nächstkleinste, so wie 1 der nächstgrößte Quotient dieser beyden Zahlen.

§. 125. Zusätze.

1) Bezeichnet man den Rest durch r, so hat man

$$a - bq = r, \quad a = bq + r, \quad \text{und} \quad r < b.$$

2) Im Falle aber $a < b$, ist $q = 0$, $bq = o$ und $a = r$, also wieder $r < b$.

3) Sind a und b beyde durch m theilbar, so ist auch der Rest r durch m theilbar (§. 121. Nr. 1. und 2.); und ist der Divisor b und der Rest r durch m theilbar, so ist solches auch der Dividend a.

4) Es seyen

$$q,\ q_1,\ q_2,\ q_3,\ q_4,\ \text{&c. &c.}$$

beziehlich die nächstkleinsten Quotienten von

$$\frac{a}{b},\ \frac{b}{r},\ \frac{r}{r_1},\ \frac{r_1}{r_2},\ \frac{r_2}{r_3},\ \text{&c. &c.}$$

und die beziehlich zugehörigen Reste:

$$r,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4,\ \text{&c. &c.}$$

Ist ferner $r_4 = 0$, also $\frac{r_2}{r_3} = q_4$ eine ganze Zahl (und daher q_4 nicht der nächstkleinste sondern der genaue Quotient), so sind alle Zahlen a, b, r, r_1, r_2, durch den letzten Rest r_3 theilbar. (Nr. 3.).

5) Auch ist r_3 die größte Zahl, welche die beyden Zahlen a und b zugleich theilet. (Indirekt aus Nr. 3. und §. 121. Nr. 4.).

Anmerkung. Man sieht leicht, wie der Satz (4), daher auch die aus ihm hervorgehenden, ausgedehnt werden können.

6) Es gibt Vielfache von a und von b, deren Differenz dem Rest r, und andere solche Vielfache deren Differenz dem Rest r_1 gleich ist. —

Denn man hat, nach der Annahme:

$$r = a - bq \text{ und } r_1 = b - r \cdot q_1 = (qq_1 + 1)b - q_1 a \text{ (Nr. 1.).}$$

7) Es gibt daher auch Vielfache von a und von b, deren Differenz irgend einem andern der Reste r_2, r_3 ꝛc. gleich ist. —

Denn es seyen z. B. $r_2 = ma - nb$ und $r_3 = n_1 b - m_1 a$, so ist auch, wegen $r_4 = r_2 - r_3 q_4$, noch:

$$r_4 = (m + m_1 q_4)a - (n + n_1 q_4)b,$$

d. h. sobald es für zwey auf einander folgende der Reste r_2 und r_3, solche Vielfache von a und b gibt, so gibt es auch solche Vielfache für den nächstfolgenden Rest r_4; deshalb folgt der Satz aus (Nr. 6.).

8) Ist daher einer der Reste gleich 1 (dann ist 1 der größte Theiler von a und von b zugleich, nach Nr. 5.), so gibt es allemal Vielfache von a und von b, deren Differenz gleich Eins ist.

9) Es gibt unendlich viele Paare von Vielfachen von a und b, deren Differenz dieselbe Zahl r ist, sobald es ein solches Paar gibt. — Hat man nämlich:

$$ma - nb = r, \text{ so ist auch}$$
$$(da - n)b - (db - m)a = r,$$

wo d eine beliebige Zahl bezeichnet.

10) Hat man daher $ma - nb = 1$, so ist auch noch $(da - n)b - (db - m)a = 1$; d. h. es gibt dann unendlich viele Vielfache von a und von b, deren Differenz = 1.

11) Lassen a und b durch p dividirt, einerlei Rest r, so ist a—b durch p theilbar.

12) Ist a—b durch p theilbar, und läßt die eine dieser

Zahlen durch p dividirt, den Rest r, so ist dies auch bey der andern der Fall.

§. 126. Erklärung.

Eine Zahl, welche durch jede der Zahlen m, n, p, ꝛc. theilbar ist, nenne ich das gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen m, n, p, ꝛc. Die kleinste ihrer Art heißt dann das kleinste gemeinschaftliche Vielfache dieser Zahlen.

Eine jede Zahl, durch welche mehrere andere Zahlen a, b, c, ꝛc. zugleich getheilt werden können, nenne ich das gemeinschaftliche Gemäß, oder den gemeinschaftlichen Theiler. — Die größte ihrer Art heißt dann der größte gemeinschaftliche Theiler der Zahlen a, b, c, ꝛc.

Eine Zahl welche außer der 1 durch keine andere Zahl theilbar ist, heißt eine absolute Primzahl, oder bloß Primzahl. Jede andere heißt eine zusammengesetzte Zahl.

Zwey oder mehr Zahlen, die außer der 1 kein gemeinschaftliches Gemäß haben, heißen relative Primzahlen, auch Primzahlen unter sich. — Im entgegengesetzten Falle nennt man sie relativ zusammengesetzte Zahlen.

§. 127. Zusatz.

Hieraus folgt:

1) Ist c ein gemeinschaftliches Vielfache von m, n, p, ꝛc., und sind die Maaße $\frac{c}{m}$, $\frac{c}{n}$, $\frac{c}{p}$ ꝛc. nicht relative Primzahlen, (d. h. haben sie noch ein gemeinschaftliches Gemäß μ), so gibt es auch ein anderes gemeinschaftliches Vielfache von m, n, p, ꝛc. nämlich $\frac{c}{\mu}$, welches kleiner als c, und ein Gemäß (Theiler) von c ist.

Denn, da $\frac{c}{m} = \mu\alpha$, $\frac{c}{n} = \mu\beta$, $\frac{c}{p} = \mu\gamma$, ꝛc. seyn soll, so ist auch $\frac{c}{\mu} = m\alpha$, $\frac{c}{\mu} = n\beta$ $\frac{c}{\mu} = p\gamma$, ꝛc. ꝛc. d. h. $\frac{c}{\mu}$ durch m, n, p, ꝛc. theilbar.

2) Ist daher b das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von m, n, p, ꝛc., so müssen die Maaße $\frac{b}{m}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{b}{p}$ ꝛc. relative Primzahlen seyn.

3) Jedes gemeinschaftliche Vielfache c, ist durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache b theilbar. —

Denn ließe $\frac{c}{b}$ den Rest r, so wäre auch r ein gemeinschaftliches Vielfache derselben Zahlen (§. 125 Nr. 3.), folglich b nicht das kleinste.

4) Sind die Maaße $\frac{c}{m}$, $\frac{c}{n}$, $\frac{c}{p}$ ꝛc. relative Primzahlen, so ist c das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen m, n, p, ꝛc. (Indirekt aus Nr. 2. und Nr. 3.).

5) Ist $ad - bc = 1$, so ist jeder Faktor des ersten Produkts mit jedem Faktor des zweyten eine relative Primzahl.

Denn wäre a uud c durch μ theilbar, so wäre auch ad—bc also 1 durch μ theilbar. (Vergl. §. 125. Nr. 8. ꝛc. ꝛc.).

6) Ist $ad - bc = 0$, d. h. $ad = bc$, und sind a und b relative Primzahlen, so ist c durch a, und d durch b theilbar.

Weil cd ein Vielfaches von c und d, dagegen ad oder bc das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von c und von d ist (Nr. 3. und Nr. 4.).

7) Sind a und b relative Primzahlen und ist bc durch a theilbar, so ist auch c durch a theilbar. —

Weil dann $bc = ad$, (Nr. 6.).

8) Ist abcd... durch m theilbar, und sind m und b, m und c, m und d, ꝛc. relative Primzahlen, so ist a durch m theilbar. (Nr. 7.).

9) Sind a und c relative Primzahlen, und μ ein Gemäß (Theiler) von a, so sind auch μ und c relative Primzahlen. (Indirekt.).

10) Sind a und b, eben so a und c relative Primzahlen, so sind auch a und bc dergleichen.

Denn hätten a und bc ein gemeinschaftliches Gemäß μ, so wären

auch μ und b, eben so μ und c, Paare relativer Primzahlen (nach Nr. 9.), dabey aber $bc = \mu d$ was gegen (Nr. 6.) ist.

11) Sind a und b, a und c, a und d, ꝛc. relative Primzahlen, so sind auch a und bcd··· relative Primzahlen.

12) Sind daher jede der Zahlen α, β, γ, δ, ··· mit jeder der Zahlen a, b, c, d, ꝛc. relative Primzahlen, so sind auch die Produkte $\alpha\beta\gamma\delta$··· und abcd··· relative Primzahlen. (Nr. **11.**).

13) Derselbe Satz gilt auch umgekehrt; d. h. Ist das Produkt α, β, γ, δ, ··· mit dem Produkt abcd··· eine relative Primzahl, so ist jeder einzelne Faktor des ersten Produkts, mit jedem einzelnen Faktor des zweyten, eine relative Primzahl. (Indirekt.).

14) Sind also α und a relative Primzahlen, so sind auch α^m und a^b, desgleichen auch α^m und a^m (wo m, b, beliebige wirkliche Zahlen sind) relative Primzahlen; wenn man der Kürze wegen, ein Produkt p·p·p·p·p···· von n Faktoren durch p^n bezeichnet.

15) Desgleichen sind dann auch noch die Produkte

$$\alpha^a \cdot \beta^b \cdot \gamma^c \cdot \cdots \quad \text{und} \quad \pi^p \cdot \varrho^r \cdot \sigma^s \cdot \cdots$$

relative Primzahlen, wenn die einzelnen Zahlen α, β, γ, ꝛc. mit den einzelnen Zahlen π, ϱ, σ, ꝛc. relative Primzahlen sind. (Nr. Nr. **13. 14.**).

Dasselbe gilt natürlich auch dann noch, wenn α, β, γ, ꝛc. π, ϱ, σ, ꝛc. absolute Primzahlen sind.

16) Das Produkt $\alpha^a \cdot \beta^b \cdot \gamma^c \cdot \delta^d \cdots$, wo α, β, γ, δ, ꝛc. absolute Primzahlen sind, a, b, c, d, ꝛc. aber beliebige Zahlen, ist weder durch α^A, noch durch β^B, noch durch γ^C, noch durch δ^D, ꝛc. theilbar, so lange $A > a$, $B > b$, $C > c$, $D > d$ ꝛc. (Nr. 8. und Nr. **14.**).

17) Jede Zahl die keine absolute Primzahl ist, läßt sich in Faktoren zerlegen, die absolute Primzahlen sind. Jede solche Zahl läßt sich daher in ein Produkt von der Form $\alpha^a \cdot \beta^b \cdot \gamma^c \cdot$ ꝛc. zerlegen, wo α, β, γ, ꝛc. absolute Primzahlen, a, b, c, ꝛc. aber beliebige Zahlen vorstellen.

18) Jede

18) Jede zusammengesetzte Zahl a besteht aus, an sich und ihrer Anzahl nach, völlig bestimmten absoluten Primzahlen, deren Produkt der Zahl a gleich ist; so daß jedes andere Produkt, welches nicht genau dieselben Primzahlen zu Faktoren hat, dieser Zahl nicht gleich seyn kann. (Indirekt aus Nr. 6.).

§. 128. Erklärung.

Die Primzahlen, welche die Faktoren einer gegebenen Zahl ausmachen, nennt man die einfachen Faktoren dieser Zahl.

§. 129. Zusatz.

1) Kommen unter den einfachen Faktoren von a, alle einfachen Faktoren von b vor, und letztere in keiner größern Anzahl, so ist a durch b theilbar.

2) Wenn eine unter den einfachen Faktoren von b vorkommende Primzahl, nicht unter denen von a vorkommt, so ist a durch b nicht theilbar; eben so wenn derselbe Faktor in b öfter vorkommt als in a.

3) Sind die Zahlen a, b, c, ꝛc. in ihre einfachen Faktoren zerlegt, so ist das Produkt aller, allen gegebenen Zahlen a, b, c, ꝛc. gemeinschaftlichen Faktoren, das größte gemeinschaftliche Gemäß. (Indirekt aus 2).

4) Die aus dem größten gemeinschaftlichen Gemäß sich ergebenden Maaße, sind nothwendig relative Primzahlen.

5) Sind daher $\frac{a}{p}$, $\frac{b}{p}$, $\frac{c}{p}$, ꝛc. nicht relative Primzahlen, sondern haben sie ein gemeinschaftliches Gemäß μ, so ist p nicht das größte gemeinschaftliche Gemäß von a, b, c, ꝛc., sondern μp ist ein größeres.

6) Das größte gemeinschaftliche Gemäß muß durch jedes kleinere theilbar seyn.

7) Ist n nicht das größte gemeinschaftliche Gemäß, so sind die Maaße nicht relative Primzahlen.

8) Sind daher die Maaße $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n}$ ꝛc. relative Primzahlen, so ist n das größte gemeinschaftliche Gemäß von a, b, c, ꝛc.

9) Sind a, b, c, ꝛc. relative Primzahlen, so ist 1 ihr größtes gemeinschaftliches Gemäß.

10) Die Zahl a, welche zu einfachen Faktoren hat: alle einfachen Faktoren von m und noch alle diejenigen von n, welche nicht beyden Zahlen m und n gemeinschaftlich sind, ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von m und n.

Die Zahl b, welche alle einfachen Faktoren von a und noch diejenigen von p hat, welche nicht beyden Zahlen a und p gemeinschaftlich sind, ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von m, n, und p.

Die Zahl c, welche alle einfachen Faktoren von b und noch diejenigen von q hat, welche beyden, der b und der q nicht gemeinschaftlich sind, ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von m, n, p und q; u. s. w. f.

Auf diese Weise erhält man sehr leicht die einfachen Faktoren des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen gegebener Zahlen m, n, p, ꝛc.

11) Ist das größte gemeinschaftliche Gemäß von a und b durch μ bezeichnet, so ist $\frac{a}{\mu} \cdot b$ oder $a \cdot \frac{b}{\mu}$ oder $\frac{ab}{\mu}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a und b. (Nr. 10.).

12) Ist p das größte gemeinschaftliche Gemäß von a und b, q das größte von p und c, r das größte von q und d, so ist auch r das größte gemeinschaftliche Gemäß von allen Zahlen a, b, c, d. — Gilt auch für beliebig viel Zahlen.

13) Ist p das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a und b, q das von p und c, r das von q und d, so ist auch r das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a, b, c, d (Nr. 10.). — Gilt ebenfalls für eine beliebige Menge von Zahlen.

§. 130. Zusätze.

Es seyen a, b, c, ꝛc. Zahlen, die alle größer als 1, und es sey μ ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfache, so kann man noch folgende Eigenschaften der Zahlen bemerken:

1) Läßt N durch μ dividirt den Rest Φ, so ist $N - \mu q = \Phi$, und $N - \Phi = \mu q$, folglich lassen N und Φ durch a, b, c, ꝛc. dividirt, beziehlich einerlei Reste. (§. 125. Nr. 12.). — Dabey ist immer $\Phi < \mu$. — Außer dieser Zahl Φ, gibt es keine andere mehr, welche kleiner als μ, und durch dieselben Zahlen a, b, c, ꝛc. dividirt, dieselben Reste ließe. (Indirekt aus §. 127. Nr. 3.).

2) Sind M und N um ein Vielfaches von μ unterschieden, d. h. ist $M - N = \mu q$, so lassen M und N durch a, b, c, ꝛc. dividirt, beziehlich einerley Reste.

3) Lassen M und N durch a, b, c, ꝛc. dividirt, beziehlich einerley Reste, so lassen sie auch durch μ dividirt, einerley Reste.

4) Gibt es eine Zahl Φ, welche kleiner als μ und durch a, b, c, ꝛc. dividirt, beziehlich gegebene Reste α, β, γ, ꝛc. läßt, so ist sie doch die einzige ihrer Art, daher durch die gegebenen Reste α, β, γ, ... völlig bestimmt. (Nr. 1.).

5) Sind von den Zahlen a, b, c, ꝛc. je zwey ein Paar relativer Primzahlen, so ist $\mu = a \cdot b \cdot c \cdot \ldots$; und es existirt dann für beliebig gegebene Reste α, β, γ, ꝛc. allemal eine solche Zahl Φ der (Nr. 4.). —

Denn es sind ab uud c, auch ac und b, auch bc und a Paare relativer Primzahlen, folglich sind allemal Zahlen möglich m, m_1, m_2, n, n_1, n_2, so daß

$$m \cdot ab - n \cdot c = 1$$
$$m_1 \cdot ac - n_1 \cdot b = 1$$
$$m_2 \cdot bc - n_2 \cdot a = 1 \text{ (§. 125. Nr. 8. Nr. 10.).}$$

Betrachtet man nun den Ausdruck

$$m \cdot ab\gamma + m_1 \cdot ac\beta + m_2 \cdot bc\alpha,$$

so ist dieser, dem gemäß, eine Zahl, welche durch a, b, c, dividirt, beziehlich die Reste α, β, γ, gibt; folglich gibt es auch eine Zahl φ, welche kleiner als μ ist und durch a, b, c, dividirt, dieselben Reste α, β, γ gibt. (Nr. 1.).

Derselbe Beweis läßt sich auf beliebig viel Zahlen erweitern.

6) Sind nicht je zwey der Zahlen a, b, c, ꝛc. relative Primzahlen, so ist $\mu < abc\cdots$, und μ ein Gemäß von abc··· (§. 127. Nr. 3. §. 121. Nr. 9.); und dann gibt es nicht immer für gegebene Reste $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ eine solche Zahl φ. (Nr. 4.). —

Denn haben a und c z. B. das gemeinschaftliche Gemäß m, so wäre

$\varphi = qa + \alpha = q_1 c + \gamma$ folglich

$\alpha - \gamma = qa - q_1 c$, daher $\alpha - \gamma$ durch m theilbar, mithin sind dann die Reste α und γ nicht mehr beliebig.

7) Sind a, b, c, · · · absolute Primzahlen, so ist $\mu = a \cdot b \cdot c \cdots$, und für alle Zahlen, die kleiner als μ, also kleiner als abc··· sind, muß es, wenn sie durch a, b, c··· dividirt werden, immer eine verschiedene Reihe der Reste geben. (Nr. 1.).

Es gibt daher so viele solcher Zahlen, die kleiner als μ und durch a, b, c··· nicht theilbar sind, als sich verschiedene Reihen von Resten denken lassen, also (a—1)(b—1)(c—1)··· solcher Zahlen (nicht mehr und nicht weniger). Alle diese Zahlen (nicht mehr und nicht weniger) sind gegen μ relative Primzahlen.

8) Ist aber φ gegen μ eine relative Primzahl, so ist auch die Zahl $N\mu + \varphi$ gegen μ eine relative Primzahl und läßt durch a, b, c ꝛc. dividirt, dieselben Reste. Umgekehrt gibt es nur die Zahlen $N\mu + \varphi$, welche durch a, b, c, ꝛc. dividirt, dieselben Reste als φ selbst lassen; also, wenn es Zahlen seyn sollen, die zugleich $< k\mu$ sind, sind solche nur in der Reihe

$$\varphi,\ \mu + \varphi,\ 2\mu + \varphi, \cdots\ (k-1)\mu + \varphi$$

enthalten. Folglich gibt es $k(a-1)(b-1)(c-1)\cdots$ verschiedene Zahlen (nicht mehr und nicht weniger), welche kleiner als $k\mu$ oder $k \cdot abc\cdots$ und gegen μ oder abc··, relative Primzahlen sind. Die Zahl k ist dabey eine beliebige Zahl der Zahlenreihe.

9) Nimmt man unter derselben Voraussetzung wie (Nr. 8.),

$$k = a^{A-1} \cdot b^{B-1} \cdot c^{C-1} \cdots,$$

so gibt es $a^{A-1} \cdot b^{B-1} \cdot c^{C-1} \cdots \times (a-1)(b-1)(c-1)\cdots$ verschiedene Zahlen, welche kleiner als $a^A \cdot b^B \cdot c^C \cdots$ und gegen μ oder abc··· relative Primzahlen sind.

10) Eben so viele Zahlen gibt es daher, welche kleiner als $a^A \cdot b^B \cdot c^C \ldots$ und gegen diese Zahl $a^A \cdot b^B \cdot c^C \ldots$ selbst relative Primzahlen sind.

11) Da nun jede zusammengesetzte Zahl in ein Produkt von der Form

$$a^A \cdot b^B \cdot c^C \ldots$$

wo a, b, c, ꝛc. absolute Primzahlen sind, zerlegt werden kann (§. 127. Nr. 18.); so kann man danach sehr leicht bestimmen, wie viele Zahlen es gibt, welche kleiner als eine gegebene Zahl und gegen sie selbst relative Primzahlen sind.

Anmerkung. In diesem Paragraphen ist die von einigen sogenannte Theorie der zyklischen Perioden enthalten.

§. 131. Erklärung.

Ein Bruch heißt in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, wenn es keinen Bruch mehr gibt, der ihm gleich, dessen Zähler und Nenner aber beziehlich kleiner wären als Zähler und Nenner des gegebenen.

§. 132. Zusatz.

1) Sind Zähler und Nenner absolute oder relative Primzahlen, so ist der Bruch in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt. (Indirekt aus §. 127. Nr. 6.).

2) Hat man Zähler und Nenner durch ihr größtes gemeinschaftliches Gemäß dividirt, so ist der neue Bruch in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt. (§. 129. Nr. 4.).

3) Sind zwey Brüche in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt und einander gleich, so sind auch die beyden Zähler einander gleich, eben so die beyden Nenner. (§. 127. Nr. 6.).

4) Ist $\frac{a}{b}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt, so ist es

auch $\frac{a^{m}}{b^{m}}$ *). — Umgekehrt: Ist $\frac{a^{m}}{b^{m}}$ ein in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch, so ist es auch $\frac{a}{b}$. (§. 127. Nr. 14.).

5) Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt und dabey $\frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d}\right)^{m}$, so ist nothwendig auch: $a = c^{m}$ und $b = d^{m}$. (Nr. 4. und Nr. 3.).

6) Ist daher $\left(\frac{g}{h}\right)^{m} = \frac{p}{q}$ und μ das größte gemeinschaftliche Gemäß von p und q, so wie ν das von g und h, so ist allemal:

$$\left(\frac{g}{\nu}\right)^{m} = \frac{p}{\mu} \text{ und } \left(\frac{h}{\nu}\right)^{m} = \frac{q}{\mu}.$$

7) Es gibt keinen Bruch, der eine ganze Zahl geben könnte, wenn er auch noch so oft mit sich selbst multiplizirt würde. (§. 129. Nr. 2.).

8) Es gibt (zuweilen, aber) nicht immer, einen Bruch, welcher 2, 3, oder m mal mit sich multiplizirt, einen gegebenen Bruch $\frac{a}{b}$ liefern könnte.

Denn es setzt dies voraus, daß wenn $\frac{a}{b}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, dann ganze oder gebrochene Zahlen α und β existiren, so daß

$$\alpha^{m} = a \quad \text{und} \quad \beta^{m} = b \text{ ist.} \quad \text{(Nr. 5.).}$$

Solche gebrochene Zahlen existiren aber nach (Nr. 10.) nie; und solche ganze Zahlen nicht immer.

---

*) Wenn unter a^{m} ein Produkt von m Faktoren verstanden ist, jeder $= a$; und wenn b^{m} dasselbe Produkt bedeutet, dessen jeder Faktor b ist.

Zahlenlehre.

Fünftes Kapitel.

Von den Zahlen-Verbindungen der dritten Art.

Vorerinnerung.

In diesem Kapitel sollen bloß die 3 letztern Operationen des Potenzirens, Radizirens und Logarithmirens unter sich betrachtet werden, und ohne daß man frühere Operationen damit in Verbindung brächte. Auch werden die Gesetze dieser Zahlen-Verbindungen zuerst unter der Voraussetzung entwickelt, daß man überall und durchaus wirkliche Zahlen habe. Zuletzt wird iedoch gezeigt, daß man dieselben Gesetze allgemein gelten lassen kann, so lange man nicht frühere Operationen mit diesen neuen in Verbindung bringt, so lange man also von den dnrch die früheren Verallgemeinerungen erhaltenen speziellen Rechnungsformen, nämlich von den reelen Zahlen keinen Widerspruch zu befürchten hat.

Erste Abtheilung.

Einfachste Gesetze der Zahlen=Verbindungen der dritten Art.

§. 133. Erklärung.

Unter der Potenz a^b (ausgesprochen „a hoch b"), welche aus den Dignanden a und dem Exponenten b besteht, denken wir uns diejenige Zahl vorgestellt, welche erhalten wird, wenn man a, b mal nimmt, und alle diese a mit einander multiplizirt; also ein Produkt von b Faktoren, wo jeder a ist.

Unter der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ (ausgesprochen „a radizirt durch b" oder „die bte Wurzel aus a"), welche aus dem Radikanden a und dem Wurzel=Exponenten b besteht, denken wir uns diejenige Zahl vorgestellt, welche mit b potenzirt, im Sinne des (§. 3.), die Zahl a wiedergibt.

Unter dem Logarithmen a?b (ausgesprochen „a logarithmirt durch b", oder „der Logarithme von a für die Basis b"), welcher aus dem Logarithmanden a und der Basis (Grundzahl) b besteht, denken wir uns diejenige Zahl vorgestellt, mit welcher b potenzirt, die Zahl a wiedergibt.

Man hat aber die Ausdrücke (Vergl. §. 6.) a und b mit einander potenzirt, durch einander radizirt, oder durch einander logarithmirt, so bald man die Zeichen

$$a^b \quad \text{oder} \quad \sqrt[b]{a} \quad \text{oder} \quad a?b$$

hingeschrieben hat. *)

Beyspiele. Also denken wir uns unter 2^3 das Produkt 2·2·2 oder die Zahl 8. — Dann bedeutet $\sqrt[2]{9}$ die Zahl 3, welche so ist, daß 3^2 d. h. 3·3 die Zahl 9 wiedergibt. — So bedeutet 8?2 die Zahl 3, welche die Eigenschaft hat, daß wenn man 2 mit ihr potenzirt, dann 2^3, d. h. 2·2·2, d. h. 8 wieder herauskommt.

---

*) Die Note zu (§. 10.) findet auch hier Anwendung.

§. 134. Zusätze.

1) Stellen a und b wirkliche (ganze) Zahlen vor, so bedeutet die Potenz a^b allemal auch eine wirkliche (ganze) Zahl, aber auch nur eine einzige. — Dagegen wird die Wurzel $\sqrt[b]{a}$ nur dann eine wirkliche Zahl vorstellen, wenn die Zahl a unter der Reihe der Potenzen 1^b, 2^b, 3^b, 4^b, 5^b, 6^b, ꝛc. ꝛc. vorkommt; aber so oft $\sqrt[b]{a}$ eine wirkliche Zahl bedeutet, ist sie doch nur eindeutig, nach (§. 116.). — Endlich wird auch der Logarithme a?b nur dann eine wirkliche Zahl bedeuten, wenn a unter der Reihe der Potenzen b^2, b^3, b^4, b^5, ꝛc. ꝛc. sich vorfindet. Hat aber der Logarithme eine Bedeutung, so ist er ebenfalls nur immer eindeutig.

2) Wird eine Potenz a^b, eine Wurzel $\sqrt[b]{a}$, oder ein Logarithme a?b aufs neue mit einem andern Ausdruck verbunden, so wird er jedesmal in Klammern eingeschlossen, damit er als solcher erkennbar bleibe.

Die Klammern dagegen, welche den Potenz- oder Wurzel-Exponenten herausheben sollen, weil sich letztere durch ihre Stellung bereits hinlänglich auszeichnen; desgleichen die Klammern, wodurch Potenzen oder Wurzeln hervorgehoben werden, wenn sie durch Logarithmation in Verbindung treten, können jedoch wegbleiben, weil durch dieses Weglassen keine Zweydeutigkeit zu befürchten ist.

3) Es ist nicht allemal $a^b = b^a$.

4) Zwey gleiche Ausdrücke mit zwey gleichen Ausdrücken (die aber alle wirkliche Zahlen vorstellen) potenzirt, radizirt oder logarithmirt, geben immer wieder gleiche Ausdrücke, wenn sie nämlich Ausdrücke geben, welche wirkliche Zahlen vorstellen; d. h.

Ist $a = b$ vorausgesetzt, so ist auch

1) $a^c = b^c$, 2) $c^a = c^b$

3) $\sqrt[c]{a} = \sqrt[c]{b}$, 4) $\sqrt[a]{c} = \sqrt[b]{c}$

5) $a?c = b?c$, 6) $c?a = c?b$.

Und ist zugleich noch $c = d$ gegeben, so hat man ferner:

$$7)\ a^c = b^d,$$

$$8)\ \sqrt[c]{a} = \sqrt[d]{b},$$

$$9)\ a?c = b?d.$$

Denn es geht solches unmittelbar aus den (§. §. 8 und 9.) hervor.

§. 135. Zusatz.

Ferner folgen aus den (§. 133.) gegebenen Definitionen augenblicklich noch folgende Sätze:

I.	$(\sqrt[b]{a})^b = a,$	1) $b^{a?b} = a,$
II.	$\sqrt[b]{(a^b)} = a,$	2) $b^a?b = a,$
III.	$\sqrt[a?b]{a} = b,$	3) $a?\sqrt[b]{a} = b.$

In Worte gekleidet lauten diese Sätze so:

I. Eine Wurzel $\sqrt[b]{a}$, wenn sie mit ihrem Wurzel-Exponenten b potenzirt wird, gibt allemal den Radikanden a; d. h. $(\sqrt[b]{a})^b = a$.

II. Eine Potenz a^b, wenn sie durch ihren Exponenten b radizirt wird, gibt allemal den Dignanden a; d. h. $\sqrt[b]{(a^b)} = a$.

1) Wenn die Basis b eines Logarithmen a?b, mit letzterem selbst potenzirt wird, so ergibt sich der Logarithmand a; d. h. $b^{a?b} = a$.

2) Wenn eine Potenz b^a durch ihren Dignanden b logarithmirt wird, so gibt sie ihren Exponenten a; d. h. $(b^a)?b = a$.

III. Wenn der Logarithmand a eines Logarithmen a?b, durch letzteren radizirt wird, so ergibt sich die Basis b; d. h. $\sqrt[a?b]{a} = b$.

3) Wenn der Radikand a einer Wurzel $\sqrt[b]{a}$, durch letztere

selbst logarithmirt wird, so ergibt sich der Wurzel-Exponent b; d. h. $a?(\sqrt[b]{a}) = b$.

Beweise für (III. und 3.) ergeben sich insbesondere noch so: für (III.), wenn man die (1.) auf beyden Seiten durch a?b radizirt und dabey die (II.) in Anwendung bringt; für (3.) dagegen, wenn man die (I.) auf beyden Seiten durch $\sqrt[b]{a}$ logarithmirt, und dabey die (2.) in Anwendung bringt.

Anmerkung. Vergleicht man aber diese Formeln mit den ganz analogen des (§. 46.) oder des (§. 12.) so findet man, den (§. 3.) zu Hilfe nehmend, und den Sinn dieses (§. 3.) wohl erwägend, daß so wie dort, so hier, die Formeln (I. und II.) oder (1. und 2.) den reinen Gegensatz aussprechen zwischen den Operationen des Potenzirens und Radizirens, oder des Potenzirens und des Logarithmirens, daß aber dort die Formeln (III.) den Gegensatz aussprechen zwischen den beyden Subtraktionen, oder zwischen den beyden Divisionen, hier dagegen die Formeln (III. und 3.) den Gegensatz beurkunden, in welchem das Radiziren und das Logarithmiren zu einander stehen.

So wie a radizirt durch b, und a logarithmirt durch b, zu einem und demselben Resultat führten, d. h. so wie auch hier die beyden, mit dem Potenziren zugleich vorhandenen indirekten Operationen in eine einzige zusammenfielen, so wie also $\sqrt[b]{a}$ völlig einerley wäre mit a?b, so würden (1. und 2.) mit (1. und II.) zusammenfallen, und die Gleichungen (III. und 3.) würden in die einzige $a?(a?b) = b$ (oder $\sqrt[(\sqrt[b]{a})]{a} = b$) übergehen, welche dann mit den Formeln (III. der §. §. 12. und 46.) die vollkommenste Analogie hätte.

Hier aber fallen, wegen der Abweichung der (Nr. 3. des §. 134.) von den (Nr. Nr. 3. der §. §. 11. und 45.), die beyden indirekten Operationen des Radizirens und des Logarithmirens nicht zusammen, sondern sind wesentlich getrennt und verschieden.

§. 136. Lehrsätze.

Die Lehrsätze aber, welche lehren, wie eine Potenz, oder eine Wurzel, oder ein Logarithme, und eine einfache Zahl mit einander potenzirt, oder durcheinander radizirt oder logarithmirt werden, sind folgende:

1) $(a^b)^c = (a^c)^b$;

2) $\sqrt[c]{(a^b)} = (\sqrt[c]{a})^b$;

3) $a^b ? c = a ? \sqrt[b]{c}$;

4) $(\sqrt[b]{a})^c = \sqrt[b]{(a^c)}$;

5) $\sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})} = \sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$;

6) $\sqrt[b]{a} ? c = a ? c^b$;

7) $(a?b)^c$; 8) $\sqrt[c]{(a?b)}$; 9) $(a?b)?c$;

10) a^{b^c}; 11) $a\sqrt[c]{b}$

12) $a^{b?c} = b^{a?c}$, oder $= \sqrt[c?a]{b}$;

13) $\sqrt[b^c]{a}$; 14) $\sqrt[c\sqrt{b}]{a}$;

15) $\sqrt[b?c]{a} = \sqrt[b?a]{c}$;

16) $a?b^c = \sqrt[c]{a?b}$;

17) $a?\sqrt[b]{c} = a^b ? c$;

18) $a?(b?c)$;

19) $a?b = a^c ? b^c = \sqrt[c]{a} ? \sqrt[c]{b}$;

welche hier noch näher betrachtet werden mögen, jedoch vorläufig nur unter der Voraussetzung, daß alle Wurzeln und alle Logarithmen möglich sind; d. h. wirkliche (ganze, absolute) Zahlen bedeuten.

Lehrsatz 1. Eine Potenz a^b wird mit einer Zahl c potenzirt, wenn man den Dignanden a potenzirt, den Exponenten b aber unverändert läßt; d. h. es ist $(a^b)^c = (a^c)^b$.

Beweis. Denn es ist $(a^b)^c$ ein Produkt von c Faktoren, wo jeder a^b ist, d. h. jeder selber wieder ein Produkt von b Faktoren ist, so daß man dieses Produkt so schreiben kann:

$$\begin{array}{l} a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\,.\,.\,. \\ \times\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\,.\,.\,. \\ \times\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\,.\,.\,. \\ \times\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\, a \,.\,.\,.\,. \\ \times\, .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \end{array}$$

wo in jeder Horizontalreihe b Faktoren stehen, und das Ganze ein Produkt von c solchen Horizontalreihen ist. Weil aber in einem solchen Produkt die einzelnen Multiplikationen in beliebiger Ordnung vorgenommen werden können, so kann man jedesmal alle diejenigen a mit einander multipliziren, welche in einer Vertikalreihe stehen, der Anzahl nach jedesmal c sind, und mit einander multiplizirt a^c geben, und dann diese durch die Vertikalreihen gebildeten Produkte, deren Anzahl b ist, wieder mit einander multipliziren, so daß man dann $(a^c)^b$ erhält.
Also ist $(a^b)^c = (a^c)^b$. (Vergl. §. 47. Lehrsatz 1.)

Lehrsatz 2. Eine Potenz a^b wird durch c radizirt, wenn man den Dignanden a durch c radizirt, und den Exponenten b unverändert läßt; d. h. es ist $\sqrt[c]{(a^b)} = (\sqrt[c]{a})^b$.

Beweis. Denn es ist nach (1.) und (§. 135. I.)

$$[(\sqrt[c]{a})^b]^c = [(\sqrt[c]{a})^c]^b = a^b;$$

und dies radizire man auf beyden Seiten durch c, den Satz (§. 135. II.) anwendend, so ergibt sich der Lehrsatz.

Lehrsatz 3. Eine Potenz a^b wird durch eine Zahl c logarithmirt, wenn man diese Zahl c durch den Exponenten b radizirt, und dann durch das was herauskommt, den Dignanden a logarithmirt; d. h. es ist $(a^b)?c = a?(\sqrt[b]{c})$.

Beweis. Denn es ist nach (Nr. 2.) und (§. 135. 1.):

$$(\sqrt[b]{c})^{a^b}?^c = \sqrt[b]{(c^{a^b}?^c)} = \sqrt[b]{(a^b)} = a;$$

und logarithmirt man hier auf beyden Seiten mit $\sqrt[b]{c}$, so ergibt sich, (§. 135. 2.) anwendend, unser Lehrsatz augenblicklich.

Lehrsatz 4. Eine Wurzel $\sqrt[b]{a}$ wird mit einer Zahl c potenzirt, wenn man den Radikanden a mit ihr potenzirt und

den Wurzel-Exponenten b unverändert läßt; d. h. es ist

$$(\sqrt[b]{a})^c = \sqrt[b]{(a^c)}.$$

Beweis. Dieser Lehrsatz (folglich auch sein Beweis) ist von dem 2ten Lehrsatz nicht verschieden.

Lehrsatz 5. Eine Wurzel $\sqrt[b]{a}$ wird durch eine Zahl c radizirt, wenn man den Radikanden a durch diese Zahl c radizirt, den Wurzel-Exponenten b dagegen unverändert läßt; d. h. es ist $\sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})} = \sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}$.

Beweis. Denn es ist nach (Nr. 4.):

$$[\sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})}]^b = \sqrt[c]{[(\sqrt[b]{a})^b]} = \sqrt[c]{a};$$

folglich ist, wenn man auf beyden Seiten durch b radizirt, nach (§. 135. II.) der Lehrsatz erwiesen.

Lehtsatz 6. Eine Wurzel $\sqrt[b]{a}$ wird durch eine Zahl c logarithmirt, wenn man die Zahl c mit dem Wurzel-Exponenten b potenzirt, und durch das was herauskommt, den Radikanden a logarithmirt; d. h. es ist

$$(\sqrt[b]{a})?c = a?(c^b).$$

Beweis. Denn es ist

$$(c^b)\sqrt[b]{a?c} = [c(\sqrt[b]{a})?c]^b = (\sqrt[b]{a})^b = a$$

nach (Lehrsatz 1. und §. 135. 1. und I.). Also ist, wenn man auf beyden Seiten durch c^b logarithmirt und (§. 135. 2.) in Anwendung bringt, unser Lehrsatz erwiesen.

Lehrsätze 7. 8. und 9. sollten lehren, wie ein Logarithme a?b mit einer Zahl c, potenzirt, radizirt und logarithmirt wird. Eben so sollten die

Lehrsätze 10. und 11. lehren, wie man eine Zahl a mit einer Potenz b^c und mit einer Wurzel $\sqrt[c]{b}$ potenzirt. Es finden sich aber dafür keine hieher gehörigen Gesetze.

Lehrsatz 12. Eine Zahl a wird mit einem Logarithmen b?c potenzirt, wenn man die Zahl a zuerst durch die Basis c logarithmirt und dann, mit dem was herauskommt, die Logarithmanden b potenzirt, oder auch, wenn man die Basis c zuerst durch die Zahl a logarithmirt und nachgehends den Logarithmanden b, durch das was herausgekommen ist, radizirt; d. h. es ist

$$a^{b?c} = b^{a?c} = \sqrt[c?a]{b}.$$

Beweis. Denn es ist nach (Nr. 1.) und (§. 135. 1.):

$$(a^{b?c})^{c?a} = (a^{c?a})^{b?c} = c^{b?c} = b;$$

also wenn man durch c?a auf beyden Seiten radizirt, nach (§. 135. II.):

$$a^{b?c} = \sqrt[c?a]{b}.$$

Ferner ist nach (Nr. 2.) und (§. 135. III. und 1.)

$$\sqrt[b?c]{[b^{a?c}]} = (\sqrt[b?c]{b})^{a?c} = c^{a?c} = a;$$

also auch der andere Theil des Lehrsatzes außer Zweifel gesetzt, wenn man hier auf beyden Seiten mit b?c potenzirt und dabey (§. 135. I.) in Anwendung bringt.

Lehrsätze 13. und 14. sollten lehren, wie man eine Zahl a durch eine Potenz b^c und durch eine Wurzel $\sqrt[c]{b}$ radizirt. Es gibt aber keine hiehergehörigen einfachen Gesetze.

Lehrsatz 15. Eine Zahl a wird durch einen Logarithmen b?c radizirt, wenn man den Logarithmanden b zuerst durch diese Zahl a logarithmirt, dann aber die Basis c durch diesen Logarithmen b?a wieder radizirt; d. h. es ist

$$\sqrt[b?c]{a} = \sqrt[b?a]{c}.$$

Beweis. Denn es ist nach (Nr. 2.) und (§. 135. 1. und III.)

$$(\sqrt[b?c]{a})^{b?a} = \sqrt[b?c]{a^{b?a}} = \sqrt[b?c]{b} = c;$$

also ist, wenn man auf beyden Seiten durch b?a radizirt, der Lehrsatz außer Zweifel.

Lehrsatz 16. Eine Zahl a wird durch eine Potenz b^c logarithmirt, wenn man die Zahl a durch den Exponenten c

radizirt, und die Wurzel $\sqrt[c]{a}$ dann wieder durch den Dignanden b logarithmirt; d. h. es ist

$$a?(b^c) = (\sqrt[c]{a})?b.$$

Beweis. Denn es ist nach (Nr. 1.) und (§. 135. 1 und I.):

$$(b^c)\sqrt[c]{a?b} = (b\sqrt[c]{a?b})^c = (\sqrt[c]{a})^c = a;$$

also ist, wenn man auf beyden Seiten durch b^c logarithmirt und dabey (§. 135. 2.) in Anwendung bringt, der Lehrsatz erwiesen.

Lehrsatz 17. Eine Zahl a wird durch eine Wurzel $\sqrt[b]{c}$ logarithmirt, wenn man die Zahl a mit dem Wurzel-Exponenten b potenzirt, und die Potenz a^b dann noch durch den Radikanden c logarithmirt; d. h. es ist

$$a?\sqrt[b]{c} = a^b?c.$$

Beweis. Dieser Lehrsatz ist kein anderer als der obige dritte.

Lehrsatz 18. sollte lehren, wie eine Zahl a durch einen Logarithmen b?c logarithmirt wird. Es gibt aber kein hiehergehöriges Gesetz.

Lehrsatz 19. Ein Logarithme a?b bleibt unverändert, wenn man den Logarithmanden a und die Basis b zugleich mit einer und derselben Zahl c potenzirt, oder beyde zugleich durch c radizirt; d. h. es ist

$$a?b = a^c?b^c = \sqrt[c]{a}?\sqrt[c]{b}.$$

Beweis. Denn es ist $(b^c)^{a?b} = (b^{a?b})^c = a^c$

und $(\sqrt[c]{b})^{a?b} = \sqrt[c]{(b^{a?b})} = \sqrt[c]{a}$,

woraus sich die Richtigkeit der Behauptungen ergibt, wenn man auf jeder Seite logarithmirt.

Anmerkung. Die Beweise der meisten dieser Sätze haben sich dadurch ergeben, daß man, wenn die eine Seite der zu erweisenden Gleichung eine Wurzel war, den Ausdruck auf der andern Seite mit dem Wurzel-Exponenten dieser Wurzel potenzirte, und zusah, ob der Radikand derselben Wurzel sich ergibt; oder, wenn die eine Seite der

zu

zu erweisenden Gleichung ein Logarithme war, daß man die Basis desselben mit dem Ausdruck auf der andern Seite potenzirte und zusah ob der Logarithmand des Logarithmen sich ergibt; oder endlich, wenn die eine Seite der Gleichung eine Potenz war, daß man die andre mit dem Exponenten dieser Potenz radizirte, und zusah, ob der Dignand derselben Potenz sich ergibt; auch, daß man die andre Seite durch den Dignanden logarithmirte und zusah, ob der Exponent sich ergibt. — Hatte man sich auf diese Weise analytisch von der Richtigkeit der Gleichung überzeugt, so ging man von den letztern Resultaten aus und bildete daraus wieder die zu erweisenden Gleichungen selbst, rückwärts gehend und auf beyden Seiten die entgegengesetzten Operationen vornehmend.

§. 137. Zusatz.

Alle Gleichungen des Potenzirens, Radizirens und Logarithmirens (wenn man vorläufig noch keine früheren Operationen mit diesen in Verbindung bringt) ergeben sich:

α) Aus den Sätzen (§. §. 135. und 136. Nr. 1.)

1) $(a^b)^c = (a^c)^b$,

2) $(\sqrt[b]{a})^b = a$, 3) $\sqrt[b]{(a^b)} = a$,

4) $b^{a?b} = a$, 5) $b^{a}?b = a$,

6) $\sqrt[a?b]{a} = b$, 7) $a?\sqrt[b]{a} = b$,

von denen (Nr. 1.) das Grundwesen des Potenzirens, die übrigen aber die reinen Gegensätze zwischen dem Potenziren, Radiziren und Logarithmiren aussprechen;

β) Aus den Sätzen (§. 134. Nr. 4.): daß Gleiches mit Gleichem potenzirt, radizirt oder logarithmirt, wiederum Gleiches gibt; endlich

γ) aus dem Satze (§. 9.), daß wenn zwey Ausdrücke einem dritten gleich sind, solche auch unter sich gleich seyn müssen.

§. 138. Zusatz.

Die Anwendungen dieser Lehrsätze und aller nach (§. 137.) entwickelten Gleichungen setzt aber voraus, daß alle Radikationen und Logarithmationen möglich sind. Daher ist es nothwendig

auf ein Verallgemeinern hinzuarbeiten, um die Anwendbarkeit derselben Sätze möglichst von Einschränkungen zu befreien.

§. 139. Aufgabe.

Man soll den Ausdruck finden, welcher mit b potenzirt, a gibt.

Auflösung. Wird selbiger durch x bezeichnet, so hat man

$$1)\ x^b = a;$$

also, wenn man durch b radizirt, auf beyden Seiten:

$$2)\ x = \sqrt[b]{a};$$

und $\sqrt[b]{a}$ ist der gesuchte Ausdruck.

§. 140. Aufgabe.

Einen vorläufig durch x bezeichneten Ausdruck zu finden, mit welchem b potenzirt, a gibt.

Auflösung. Es soll seyn

$$1)\ b^x = a;$$

also wenn man auf beyden Seiten durch b logarithmirt:

$$2)\ x = a?b;$$

und a?b ist der gesuchte Ausdruck.

§. 141. Aufgabe.

Es wird der Ausdruck x gesucht, so daß, wenn man b durch ihn radizirt, dann a herauskommt.

Auflösung. Man hat hier vorausgesetzt

$$1)\ \sqrt[x]{b} = a;$$

also, wenn man b durch beyde Seiten logarithmirt,

$$2)\ x = b?a.$$

142. Aufgabe.

Es wird der Ausdruck x gesucht, so daß, wenn man b durch ihn logarithmirt, dann a herauskommt.

Auflösung. Man hat hier vorausgesetzt

1) $b ? x = a$;

also, wenn man b durch beyde Seiten radizirt:

2) $x = \sqrt[a]{b}$.

§. 143. Aufgabe.

Es wird der Ausdruck x gesucht, welcher durch b radizirt, a gibt.

Auflösung. Man hat vorausgesetzt

1) $\sqrt[b]{x} = a$;

also, wenn auf beyden Seiten mit b potenzirt wird,

2) $x = a^b$.

§. 144. Aufgabe.

Den Ausdruck x zu finden, welcher durch b logarithmirt, a gibt.

Anflösung. Es ist vorausgesetzt

1) $x ? b = a$;

also, wenn man b mit beyden Ausdrücken potenzirt:

2) $x = b^a$.

Die Beweise sind denen (§. §. 16.—18.) gegebenen vollkommen ähnlich.

§. 145. Zusatz.

Sind a und b wirkliche Zahlen, so sind die beyden letztern Aufgaben allemal möglich; dagegen die 4 erstern nur in seltenen Fällen.

Später muß man daher suchen, die Begriffe dergestalt zu verallgemeinern, daß auch jene Aufgaben in allen Fällen möglich werden.

Zweyte Abtheilung.

Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Gesetze der Zahlen-Verbindungen der dritten Art.

---

§. 146. Lehrsatz.

Wird eine Zahl a hinter einander mit mehren andern Zahlen b, c, d, ꝛc. potenzirt, oder radizirt, so ist es einerley in welcher Ordnung dies geschieht, wenn nur allemal als erster Dignand genommeu wird; d. h. es ist z. B.

1) $\left([(a^b)^c]^d\right)^h = \left([(a^d)^h]^c\right)^b = \left([(a^h)^b]^d\right)^c =$ ꝛc. ꝛc.

2) $\sqrt[d]{[\sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})}]} = \sqrt[c]{[\sqrt[b]{(\sqrt[d]{}}$ $\sqrt[b]{[\sqrt[d]{(\sqrt[c]{a})}]} =$ ꝛc. ꝛc.

und auch

3) $[(\sqrt[d]{[\sqrt[c]{(a^b)}]})^h]^f = \sqrt[d]{\quad}\ ([(a^b)^h]^f)]$

$= (\sqrt[c]{[(\sqrt[d]{a})^b]^f})^h =$ ꝛc. ꝛc.

Beweise ergeben sich nach Art der (§. 54.) und (§. 58.) geführten, sehr einfach durch wiederholte Anwendung der Lehrsätze (§. 136. Nr. Nr. 1. und 2.).

§. 147. Lehrsatz.

So lange keine der 4 erstern Operationen mit zugezogen werden, so lange man also nur Gleichungen nach den, (§. 137.) gegebenen Regeln ableitet, so lange kann man diese Gleichungen ganz allgemein gelten lassen, ohne sich mehr um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben zn bekümmern. — Die Potenzen a^b, Wurzeln $\sqrt[b]{a}$, und Logarithmen a?b sind dann bloße Rechnungsformen (bloße angezeigte Operationen) und die Gleichungen selbst lehren dann nichts weiter, als das Verhalten der Operationen (des Potenzirens, Radizirens und Logarithmirens) zu einander kennen.

Beweis dem (§. 63.) gegebenen leicht nachzubilden.

Anmerkung. Ganz anders wird es aber, wenn man später diese 3 letztern Operationen mit den 4 erstern noch in Verbindung bringt Ein allgemeines Arbeiten mit bloßen Rechnungsformen wird dann nur mit sehr zu berücksichtigenden Einschränkungen möglich.

Zahlenlehre.

Sechstes Kapitel.

Gesetze der Mischung der Zahlen-Verbindungen der dritten Art, mit denen der beyden ersten Arten. Von der irrationalen Zahl. Von der reelen Potenz, der reelen Wurzel und dem reelen Logarithmen.

Vorerinnerung.

Dieses Kapitel hat zunächst zu lehren, wie Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten mit der einfachen Zahl potenzirt, radizirt und logarithmirt, dann — wie Potenzen und Wurzeln und Logarithmen und die einfache Zahl addirt, subtrahirt, multiplizirt und dividirt werden, unter der Voraussetzung, daß man zunächst durchaus wirkliche Zahlen habe; — endlich überhaupt, wie Gleichungen aus einander abgeleitet werden. — Dann müssen die Begriffe erweitert werden, um wo möglich zuletzt zu den Potenzen, Wurzeln und Logarithnen zu gelangen, in denen alle Zahlen beliebig reel gedacht sind, und nachweisen, daß das Arbeiten mit solchen allgemeinern Ausdrücken nach denselben früher entwickelten Gesetzen erlaubt ist, um nachher dieses Arbeiten ganz allgemein gelten lassen zu können, ohne sich mehr um die Bedeutung der Buchstaben zu bekümmern, und doch überzeugt zu seyn, daß man nirgends zu wiedersprechenden Resultaten geführt werden könne. Dies mißlingt

zwar hier zur Zeit noch; jedoch erhebt man sich durch die ganze Potenz zur Differenz-Potenz, und zur reelen Potenz, so wie dadurch zur reelen Wurzel und zu dem reelen Logarithmen, d. h. zu a^b, $\sqrt[b]{a}$, $a?b$, wo a nicht negativ gedacht ist; und man zeigt, wie das Arbeiten mit diesen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen nach denselben früher entwickelten Gesetzen statt findet. — Zuletzt wird hinsichtlich der gänzlichen Verallgemeinerung der hieher gehörigen Gesetze, auf das Ende des zweiten Theiles dieses Lehrbuches hingewiesen, und so lange wird mit keinen andern Potenzen, Wurzeln und Logarithmen den entwickelten Gesetzen gemäß gearbeitet als nur mit solchen, deren Bedeutung durch eine vorhandene Definition festgestellt und für welche zugleich nachgewiesen worden ist, daß sie den, in jedem Falle gerade anzuwendenden Gesetzen des Kalkuls, wirklich unterworfen sind.

Erste Abtheilung.

Einfachste Gesetze dieser Mischung.

---

§. 148. Willkührlicher Satz.

Um nicht durch zu viele Klammern die Ausdrücke schwerfällig zu machen setzen wir folgende Regel fest:

So oft ein Ausdruck der dritten Art (Potenz, Wurzel oder Logarithme) mit einem andern Ausdruck durch eine Verbindung der vorhergehenden zweiten oder ersten Art auf's neue verbunden wird, lassen wir die nach (§. **134.** Nr. **2.**) ihn nothwendig einschließenden Klammern weg.

Umgekehrt also: wenn in einem Ausdruck durch Klammern nicht ganz genau bestimmt ist, wie solcher nach und nach entstanden, so setzen wir stillschweigend voraus, daß die Verbindungen der dritten Art zuerst hergestellt werden müssen.

Beyspiele. Demnach

steht ab^c statt $a(b^c)$ und nicht statt $(ab)^c$,

und $a \pm b^c$ statt $a \pm (b^c)$ und nicht statt $(a \pm b)^c$,

und $\frac{a^m}{b}$ statt $\frac{(a^m)}{b}$ und nicht statt $\left(\frac{a}{b}\right)^m$,

und steht $a:b^m$ statt $a:(b^m)$ und nicht statt $(a:b)^m$.

§. 149. Lehrsätze.

Die Lehrsätze aber, welche lehren, wie eine Summe, Differenz, Produkt oder Quotient, und eine Zahl, mit einander potenzirt, radizirt oder logarithmirt, desgleichen, wie Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und einfache Zahlen, zu, von, mit und durch einander addirt, subtrahirt, multiplizirt und dividirt werden, sind folgende:

1) $(a+b)^c$; 2) $(a-b)^c$;

3) $(ab)^c = a^c \cdot b^c$;

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$;

5) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$;

6) $a^{b-c} = a^b : a^c$;

7) $a^{bc} = (a^b)^c = (a^c)^b$;

8) $a^{b:c} = \sqrt[c]{(a^b)} = (\sqrt[c]{a})^b$;

9) $\sqrt[c]{(a+b)}$; 10) $\sqrt[c]{(a-b)}$;

11) $\sqrt[c]{(ab)} = \sqrt[c]{a} \cdot \sqrt[c]{b}$

12) $\sqrt[c]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}$;

13) $\sqrt[b+c]{a}$; 14) $\sqrt[b-c]{a}$;

15) $\sqrt[bc]{a} = \sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})} = \sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})}$;

16) $\sqrt[b:c]{a} = (\sqrt[b]{a})^c = \sqrt[b]{(a^c)}$;

17) $(a+b)?c$; 18) $(a-b)?c$;

19) $(a \cdot b)?c = a?c + b?c$;

20) $\left(\frac{a}{b}\right)?c = a?c - b?c$;

21) $a^m + b = b + a^m$;

22) $a^m - b$; 23) $a - b^m$;

24) $a^m \cdot b = b \cdot a^m = (a \cdot \sqrt[m]{b})^m$;

25) $a^m : b = (a : \sqrt[m]{b})^m$;

26) $\frac{b}{a^m} = \left(\frac{\sqrt[m]{b}}{a}\right)^m$;

27) $\sqrt[m]{a+b} = b+\sqrt[m]{a}$;

28) $\sqrt[m]{a-b}$; 29) $a-\sqrt[m]{b}$;

30) $\sqrt[m]{a \cdot b} = b \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{(ab^m)}$;

31) $\sqrt[m]{a : b} = \sqrt[m]{(a : b^m)}$;

32) $a : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{(a^m : b)}$;

33) $a ? b + c = c + a ? b$;

34) $a ? b - c$; 35) $a - b ? c$;

36) $a ? b \cdot c = c \cdot a ? b = a^c ? b = a ? \sqrt[c]{b}$;

37) $a ? b : c = \sqrt[c]{a ? b} = a ? b^c$;

38) $a : b ? c = c^a ? b = c ? \sqrt[a]{b}$;

39) $a \cdot b = c^a ? \sqrt[b]{c}$;

40) $a : b = c^a ? c^L = \sqrt[b]{c} ? \sqrt[a]{c}$;

41) $a ? b = a ? c \cdot c ? b = \frac{a ? c}{b ? c} = \frac{c ? b}{c ? a}$;

42) $\sqrt[c]{(a^b)} = \sqrt[cn]{(a^{bn})} = \sqrt[c:n]{(a^{b:n})}$;

welche jetzt noch näher erörtert werden mögen, jedoch unter der Voraussetzung, daß alles möglich ist, d. h. daß überall wirkliche (positive, ganze) Zahlen gedacht werden.

Lehrsätze 1. und 2. sollten lehren, wie man eine Summe und eine Differenz mit m potenzirt. Es existirt aber dafür kein einfaches Gesetz, sondern ein ziemlich zusammengesetztes, später unter dem Namen des binomischen Lehrsatzes hinzustellendes. — Für die speziellen Fälle, wo $m = 2, 3,$ oder 4 ist, mag man solches durch direkte

Multiplikation von a+b mit a+b u. s. w. f., oder von a—b mit a—b u. s. w. f., sich verschaffen; und man erhält dann:

1·1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$;
2·2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$;
3·3) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;
4·4) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;
5·5) $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$;
6·6) $(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.

Lehrsätze 3. und 4. Ein Produkt ab oder ein Quotient $\frac{a}{b}$ wird mit einer Zahl c potenzirt, wenn man jeden der Theile a und b potenzirt; d. h. es ist

$$(ab)^c = a^c \cdot b^c, \text{ und } \left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}.$$

Dieselben Sätze lehren auch:

Zwey Potenzen a^c und b^c, welche einen gemeinschaftlichen Exponenten c haben, werden mit einander multiplizirt, oder durch einander dividirt, wenn man die Dignanden a und b mit einander multiplizirt oder dividirt, den gemeinschaftlichen Exponenten c aber, als solchen beibehält.

Beweis. Denn es stellt $(ab)^c$ ein Produkt vor, welches entsteht, wenn ab, cmal genommen wird, und wenn man alle diese ab mit einander multiplizirt. Weil aber jedes dieser Produkte ab, selber wieder durch Multiplikation aus a und b entstanden ist, so ist es nach (§. 54.) einerlei, in welcher Ordnung diese Faktoren alle mit einander multiplizirt werden; also kann man zuerst alle a mit einander multiplizieren, gibt a^c, dann auch alle b mit einander, gibt b^c, und diese Resultate wieder mit einander.

Dann ist aber auch:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^c \cdot b^c = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^c = a^c;$$

also ist, wenn mit b^c auf beyden Seiten dividirt wird, auch der (Lehrsatz 4.) außer Zweifel.

Lehrsatz 5. und 6. Eine Zahl a wird mit einer Summe b+c oder Differenz b—c potenzirt, wenn man sie mit jedem der Theile b und c potenzirt, und die beyden Potenzen dann mit einander multiplizirt oder durch einander dividirt; d. h. es ist $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ und $a^{b-c} = a^b : a^c$.

Derselbe Satz lehrt auch noch:

Zwey Potenzen a^b und a^c, welche einen gemeinschaftlichen Dignanden a haben, werden mit einander multiplizirt, oder durch einander dividirt, wenn man die Exponenten b und c addirt oder subtrahirt, den gemeinschaftlichen Dignanden a aber unverändert beybehält.

Beweis. Denn es bedeutet a^{b+c} das Produkt von b+c Faktoren, wo jeder a ist; und $a^b.a^c$ bedeutet dasselbe Produkt nach (§. 54.); also ist $a^{b+c} = a^b.a^c$. — Dann ist aber auch $a^{b-c} \cdot a^c = a^{b-c+c} = a^b$, folglich, wann hier durch a^c auf beyden Seiten dividirt wird, auch der Lehrsatz (Nr. 6.) außer Zweifel.

Lehrsatz 7. Eine Zahl a wird mit einem Produkt bc potenzirt, wenn man nach und nach mit den einzelnen Faktoren potenzirt; d. h. es ist

$$a^{bc} = (a^b)^c = a^{cb} = (a^c)^b.$$

Oder auch:

Eine Potenz a^b wird mit c potenzirt, wenn man den Exponenten b mit c multiplizirt.

Beweis. Denn es bedeutet a^{bc} ein Produkt von bc Faktoren, wo jeder a ist, welches also die Form (§. 136. Bew. d. Lehrs. 1.) annehmen kann. Und dadurch ist der Lehrsatz sogleich außer Zweifel.

Lehrsatz 8. Eine Zahl a wird mit einem Quotienten $\frac{b}{c}$ potenzirt, wenn man sie zuerst mit dem Dividenden b potenzirt, und dann was herauskommt, durch den Divisor c radizirt; oder auch: wenn man zuerst durch c radizirt und dann erst mit b potenzirt; d. h. es ist

$$a^{b:c} = \sqrt[c]{(a^b)} = (\sqrt[c]{a})^b.$$

Beweis. Denn es ist nach (Nr. 7.):

$$(a^{b:c})^c = a^{b:c.c} = a^b;$$

also ist, wenn man auf beyden Seiten durch c radizirt und damit noch (§. 135. II.) in Verbindung setzt, alles erwiesen.

Von den Lehrsätzen 9. nnd 10. wird späterhin nachgewiesen, daß sie in denen (1. und 2.) schon enthalten sind.

Lehrsätze 11. und 12. Ein Produkt ab oder ein Quotient $\frac{a}{b}$ wird durch eine Zahl c radizirt, wenn man jeden der Theile a und b radizirt; d. h. es ist

$$\sqrt[c]{(ab)} = \sqrt[c]{a} \cdot \sqrt[c]{b} \text{ und } \sqrt[c]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}.$$

Oder auch:

Zwey Wurzeln $\sqrt[c]{a}$ und $\sqrt[c]{b}$, die einen gemeinschaftlichen Wurzel-Exponenten c haben, werden mit einander multiplizirt, oder durch einander dividirt, wenn man die Radikanden a und b mit einander multiplizirt oder dividirt, und den gemeinschaftlichen Wurzel-Exponenten c beibehält.

Beweis. Denn es ist nach (Nr. 3.):

$$(\sqrt[c]{a} \cdot \sqrt[c]{b})^c = (\sqrt[c]{a})^c \cdot (\sqrt[c]{b})^c = a \cdot b;$$

folglich erhellet der Lehrsatz, wenn man auf beyden Seiten durch c radizirt, nach (§. 134. II.).

Ferner ist nun auch

$$\sqrt[c]{\left(\frac{a}{b}\right)} \cdot \sqrt[c]{b} = \sqrt[c]{\left(\frac{a}{b} \cdot b\right)} = \sqrt[c]{a};$$

also ist auch, wenn durch $\sqrt[c]{b}$ dividirt wird, auf beyden Seiten, der andere Lehrsatz außer Zweifel.

Lehrsätze 13. und 14. enthalten keine hieher gehörigen Gesetze.

Lehrsatz 15. Eine Zahl a wird durch ein Produkt bc radizirt, wenn man nach und nach durch einen Faktor nach dem andern radizirt; d. h. es ist

$$\sqrt[bc]{a} = \sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})} = \sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})}.$$

Oder auch:

Eine Wurzel $\sqrt[c]{a}$ wird durch eine Zahl b radizirt, wenn man den Wurzel-Exponenten c mit b multiplizirt.

Beweis. Denn es ist

$$[\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}]^{bc} = \left([\sqrt[b]{(\sqrt[c]{a})}]^{b}\right)^{c} = (\sqrt[c]{a})^{c} = a;$$

also, durch bc radizirt auf beyden Seiten, ꝛc. ꝛc.

Lehrsatz 16. Eine Zahl a wird durch einen Quotienten $\frac{b}{c}$ radizirt, wenn man solche zuerst durch den Dividenden b radizirt, und was herauskommt, mit dem Divisor c wieder potenzirt; oder: wenn man zuerst mit c potenzirt und dann noch durch b radizirt; d. h. es ist

$$\sqrt[b:c]{a} = (\sqrt[b]{a})^{c} = \sqrt[b]{(a^{c})};$$

Beweis. Denn es ist

$$[(\sqrt[b]{a})^{c}]^{b:c} = (\sqrt[b]{a})^{c(b:c)} = (\sqrt[b]{a^{b}}) = a;$$

also erhellet der Lehrsatz, wenn man auf beyden Seiten durch b:c radizirt.

Lehrsätze 17. und 18. enthalten keine einfachen hieher gehörigen Gesetze.

Lehrsätze 19. und 20. Ein Produkt ab oder ein Quotient $\frac{a}{b}$ wird durch eine Zahl c logarithmirt, wenn man jeden der Theile a und b logarithmirt, und beyde Logarithmen dann addirt oder subtrahirt; d. h. es ist

$$(ab)?c = a?c + b?c$$

und

$$(a:b)?c = a?c - b?c.$$

Oder auch:

Zwey Logarithmen a?c und b?c, welche eine und dieselbe Basis c haben, werden zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, wenn man die Logarithmanden a und b

mit einander multiplizirt oder durch einander dividirt, und die gemeinschaftliche Basis c als solche beibehält.

Beweise. Denn es ist nach (Nr. 5.) und (§. 135. 1.)

$$c^{a?c+b?c} = c^{a?c} \cdot c^{b?c} = a \cdot b;$$

also ist, wenn man auf beyden Seiten durch c logarithmirt, der Lehrsatz 19. außer Zweifel, nach (§. 135. 2.).

Ferner ist dann

$$\frac{a}{b}?c+b?c = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)?c = a?c;$$

also ist, wenn man b?c auf beyden Seiten subtrahirt, auch (Nr. 20.) erwiesen.

Lehrsätze 21. 22. 23. enthalten keine hieher gehörigen Gesetze.

Lehrsätze 24. 25. 26. Produkte und Quotienten wie $a^m \cdot b$, $a^m : b$, $a : b^m$, deren einer Theil eine Potenz, der andere dagegen ein einfacher Ausdruck ist, werden in eine Potenz verwandelt, wenn man den einfachen Ausdruck zuvor durch den Exponenten m radizirt, dann aber den Exponenten m auf das Ganze ausdehnt; nämlich

$$a^m \cdot b = (a \cdot \sqrt[m]{b})^m; \quad a^m : b = (a : \sqrt[m]{b})^m; \quad a : b^m = (\sqrt[m]{a} : b)^m.$$

Beweis. Denn es ergibt sich die Richtigkeit dieser 3 Gleichungen unmittelbar aus (Nr. Nr. 3. und 4.).

Lehrsätze 27. 28. 29. enthalten keine hieher gehörigen Gesetze.

Lehrsätze 30. 31. 32. Produkte und Quotienten wie

$$\sqrt[m]{a} \cdot b \text{ oder } b \cdot \sqrt[m]{a}, \text{ oder } \frac{\sqrt[m]{a}}{b}, \text{ oder } \frac{a}{\sqrt[m]{b}},$$

deren einer Theil (Faktor, Dividend oder Divisor) eine Wurzel ist, werden in Wurzeln verwandelt, wenn man den andern Theil (Faktor, Divisor oder Dividend) mit dem Wurzel-Exponenten m potenzirt, und dann das Wurzelzeichen auf das Ganze ausdehnt; d. h. es ist

$$\sqrt[m]{a \cdot b} = b \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{(ab^m)};$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{b} = \sqrt[m]{\left(\frac{a}{b^m}\right)}; \qquad \frac{a}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\left(\frac{a^m}{b}\right)}.$$

Beweise folgen unmittelbar aus (Nr. Nr. 11. und 12.).

Lehrsätze 33. 34. 35. enthalten keine hieher gehörigen Gesetze.

Lehrsätze 36. 37. Ein Logarithme $a?b$ wird mit einer Zahl c multizlizirt, oder durch sie dividirt, wenn man den Logarithmanden a mit derselben potenzirt oder radizirt; d. h.

$$a?b \cdot c = (a^c)?b.$$

und $$a?b : c = (\sqrt[c]{a})?b.$$

Oder auch:

Eine Potenz a^c (oder Wurzel $\sqrt[c]{a}$) wird durch eine Zahl b logarithmirt, wenn man den Dignanden (oder Radikanden) a logarithmirt, und was herauskommt, durch den Exponenten (oder Wurzel-Exponenten) c multiplizirt (oder dividirt).

Beweis. Denn es ist nach (Nr. 7.):

$$b^{a?b \cdot c} = (b^{a?b})^c = a^c;$$

also ist, wenn man auf beyden Seiten durch b logarithmirt, der (Lehrsatz 36.) außer Zweifel.

Eben so ist dann nach (Nr. 36.):

$$(\sqrt[c]{a})?b \cdot c = (\sqrt[c]{a})^c?b = a?b;$$

also erhellet auch (Nr. 37.), wenn man auf beyden Seiten durch c dividirt.

Lehrsatz 38. Eine Zahl a wird durch einen Logarithmen $b?c$ dividirt, wenn man die Basis c des Logarithmen, mit der Zahl a potenzirt, und dann was herauskommt, noch mit dem Logarithmanden b logarithmirt; oder auch,

wenn man den Logarithmanden b durch die Zahl a radizirt, und dadurch die Basis c logarithmirt; d. h. es ist

$$a:b?c = (c^a)?b = c?(\sqrt[a]{b}).$$

Oder auch:

Eine Potenz c^a wird durch eine Zahl b logarithmirt, wenn man diese Zahl b durch den Dignanden c logarithmirt, und dadurch den Exponenten a dividirt; und

Eine Zahl c wird durch eine Wurzel $\sqrt[a]{b}$ logarithmirt, wenn man den Radikanden b durch die Zahl c logarithmirt, und dadurch den Wurzel-Exponenten a dividirt.

Beweis. Denn es ist nach (Nr. 8.):

$$b^{a:b?c} = (\sqrt[b?c]{b})^a = c^a;$$

also, wenn man durch b logarithmirt, ist der eine Theil des Lehrsatzes erwiesen.

Ferner ist nach derselben (Nr. 8.)

$$(\sqrt[a]{b})^{a:b?c} = \sqrt{}^{b?c}\overline{}^{*)} (\sqrt[a]{b})^a = \sqrt[b?c]{b} = c;$$

also, wenn man durch $\sqrt[a]{b}$ logarithmirt, auf beyden Seiten, ist auch der andre Theil des Lehrsatzes außer Zweifel.

Lehrsatz 39. Eine Potenz c^a wird durch eine Wurzel $\sqrt[b]{c}$, deren Radikand der vorige Dignand c ist, logarithmirt, wenn man den Exponenten a mit dem Wurzel-Exponenten b multiplizirt; d. h. es ist $ab = (c^a)?(\sqrt[b]{c})$.

Beweis. Denn es ist

$$(\sqrt[b]{c})^{ab} = [(\sqrt[b]{c})]^{ba} = c^a;$$

also ist, wenn man durch $\sqrt[b]{c}$ auf beyden Seiten logarithmirt, der Satz außer Zweifel.

---

*) Statt den Radikanden in Klammern einzuschließen läßt man häufig auch über ihn einen Querstrich weggehen, der die Klammern ersetzen soll.

Lehr-

Lehrsatz 40. Zwey Potenzen c^a und c^b (oder zwey Wurzeln $\sqrt[b]{c}$ und $\sqrt[a]{c}$), welche einen gemeinschaftlichen Dignanden (oder Radikanden) c haben, werden durch einander logarithmirt, wenn man ihre Exponenten dividirt, (die Wurzel-Exponenten in umgekehrter Ordnung); d. h. es ist

$$a:b = c^a ? c^b = \sqrt[b]{c} ? \sqrt[a]{c}.$$

Beweis. Denn es ist nach (Nr. 7. und Nr. 8.):

$$(c^b)^{a:b} = c^a \text{ und } (\sqrt[a]{c})^{a:b} = \sqrt[b]{[(\sqrt[a]{c})^a]} = \sqrt[b]{c};$$

aus welchen beyden Gleichungen beyde Theile unsers Lehrsatzes hervorgehen, wenn man die eine durch c^b, die andere durch $\sqrt[a]{c}$ auf beyden Seiten logarithmirt.

Lehrsatz 41. Ein Logarithme a?b wird in ein Produkt oder in einen Quotienten zweyer andern Logarithmen verwandelt, wenn man den Logarithmanden a mit einer beliebigen Zahl c logarithmirt, dann aber c selbst durch die Basis b wieder logarithmirt und diese beyden Logarithmen a?c und c?b mit einander multiplizirt; oder: wenn man sowohl den Logarithmanden a als auch die Basis b, mit einer beliebigen Zahl c logarithmirt, und diese Logarithmen a?c und b?c durch einander dividirt; oder, wenn man eine beliebige Zahl c sowohl durch den Logarithmanden a, als auch durch die Basis b logarithmirt, und dann diese, aber in umgekehrter Ordnung genommenen Logarithmen c?b und c?a durch einander dividirt; d. h. es ist

$$a?b = a?c \cdot c?b = \frac{a?c}{b?c} = \frac{c?b}{c?a}.$$

Beweis. Denn es ist nach (Nr. 7. und §. 135. Nr. 1.):

$$b^{a?c.c?b} = (b^{c?b})^{a?c} = c^{a?c} = a;$$

also, wenn man auf beyden Seiten durch b logarithmirt, auch:

$$a?c \cdot c?b = a?b.$$

Aber eben weil nun auch

$$a?b \cdot b?c = a?c$$

ist, so folgt, wenn man durch b?c dividirt:

$$a?b = \frac{a?c}{b?c}.$$

Endlich ist auch, nach dem eben erwiesenen:

$$c?a \cdot a?b = c?b;$$

also, wenn man durch c?a dividirt:

$$a?b = \frac{c?b}{c?a}.$$

Lehrsatz 42. Eine Wurzel $\sqrt[c]{(a^b)}$, deren Radikand eine Potenz ist, ändert sich nicht, wenn man die beyden Exponenten b und c mit einer und derselben Zahl n multiplizirt, oder beyde zugleich durch eine und dieselbe Zahl n dividirt; d. h. es ist

$$\sqrt[c]{(a^b)} = \sqrt[cn]{(a^{bn})} = \sqrt[c:n]{a^{b:n}}.$$

Beweis. Denn es ist

$$[\sqrt[c]{(a^b)}]^{cn} = \left([\sqrt[c]{(a^b)}]^c\right)^n = (a^b)^n = a^{bn},$$

woraus der Lehrsatz hervorgeht, wenn man auf beyden Seiten durch cn radizirt.

Anmerkung 1. Die hieher gehörigen Beweise findet jeder Anfänger sogleich von selbst, sobald wir hiermit auf die Analogie derselben mit denen der Sätze (§. 13. §. 47. §. 81. und §. 136.) aufmerksam gemacht haben werden.

Anmerkung 2. Auch muß hier wiederholt darauf hingewiesen werden, daß der wörtliche Ausdruck dieser, so wie der frühern ähnlichen Lehrsätze, bereits im praktischen Sinne zu nehmen ist. Eine Zahl a ist z. B., genau nach dem (§. 133.), bereits mit dem Produkt bc potenzirt, sobald man nur a^{bc} hingeschrieben hat. Der Lehrsatz (7.) lehrt also eigentlich nicht, wie eine Zahl a mit einem Produkt bc potenzirt, sondern wie dies durch dieses Potenziren erhaltene Resultat a^{bc}, in einen andern gleichbedeutenden Ausdruck verwandelt wird. — In diesem praktischen Sinne sind aber auch früher, so wie jetzt, alle diese wörtlichen Ausdrücke der Sätze genommen und hingestellt worden.

§. 150. Zusatz.

Uebersieht man die Beweise dieser Sätze und die (§. §. 14. 48. und 82.) so wie noch (§. 137.), so erhellet bald, daß alle möglichen Gleichungen dieser 6. ersten Kapitel abgeleitet sind und werden

α) aus den Sätzen

1) $a+b = b+a$; 2) $(a+b)+c = (a+c)+b$;

3) $a \cdot b = b \cdot a$; 4) $(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b$;

5) $(a+b)c = ac+bc$; 6) $(a^b)^c = (a^c)^b$;

7) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$; 8) $a^{b.c} = (a^b)^c$;

und 9) $(ab)^c = a^c \cdot b^c$;

ferner

10) $(a-b)+b = a$; 11) $(a+b)-b = a$; 12) $a-(a-b) = b$;

13) $(a:b) \cdot b = a$; 14) $(a \cdot b) : b = a$; 15) $a : (a:b) = b$;

16) $(\sqrt[b]{a})^b = a$; 17) $\sqrt[b]{(a^b)} = a$;

18) $b^{a?b} = a$; 19) $(b^a)?b = a$;

20) $\sqrt[a?b]{a} = b$; 21) $a?(\sqrt[b]{a}) = b$;

von denen (Nr. Nr. 1. und 2.) das Grundwesen der Addition, (Nr. Nr. 3. und 4.) das Grundwesen der Multiplikation, (Nr. 5.) das Grundwesen der Mischung der Addition mit der Multiplikation, (Nr. 6.) das Grundwesen des Potenzirens, (Nr. 7.) das Grundwesen der Mischung der Potenz und der Summe, endlich (Nr. Nr. 8. und 9.) das Grundwesen der Mischung der Potenz und des Produkts aussprechen, während (Nr. Nr. 10—12.) die reinen Gegensätze der Addition und ihrer beyden Subtraktionen, (Nr. Nr. 13—15.) die reinen Gegensätze zwischen der Multiplikation und ihren beyden Divisionen, endlich (Nr. Nr. 16—21.) die reinen Gegensätze der Potenzirung, und ihrer beyden indirekten Operationen, nämlich der Radikation und der Logarithmation enthalten;

β) mit Anwendung der Sätze (§. 11. Nr. 4. §. 45. Nr. 4. und §. 135. Nr. 4.), daß nämlich Gleiches mit Gleichem durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzirung, Radikation und Logarithmation verbunden, wiederum Gleiches gibt; endlich

γ) in Verbindung mit dem Satze (§. 9.), daß wenn zwey Ausdrücke einem dritten gleich sind, solche dann auch unter sich gleich seyn müssen.

§. 151. Zusatz.

So wie aber diese Gleichungen der Potenzen, Wurzeln und Logarithmen bis jetzt erwiesen worden sind, dürfen sie nur dann angewandt werden, wenn man durchaus lauter wirkliche (positive ganze) Zahlen hat; und es muß daher wiederum versucht werden, nachzuweisen, daß man dasselbe Operiren des (§. 150.) ganz allgemein kann Statt finden lassen, so daß man sich nicht mehr um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben bekümmert, und mit der Ueberzeugung, daß man dadurch nie zu Widersprüchen geführt werden könne.

Jetzt indessen, wo alle 7 Operationen in beliebiger Verbindung mit einander vorkommen, hat man nicht bloß zu fürchten, daß man mit der Zahl selbst, sondern auch, daß man mit allen den frühern speziellen Zahlformen, welche das allgemeine Auffassen der Differenz und des Quotienten eingeführt hat, und welche wir (§. 111.) unter dem Namen der reelen Zahlen zusammengefaßt haben, nicht in Widerspruch gerathen könne, wenn man das (§. 150.) angedeutete Operiren ganz allgemein beybehalten wollte, so daß die Potenz a^b, die Wurzel $\sqrt[b]{a}$ und der Logarithme $a?b$ bloße Rechnungsformen wären, und die Gleichungen bloß lehrten, wie sich diese 7 Operationen zu einander verhalten.

Anmerkung. Um aber zu der Ueberzeugung zu gelangen, daß man nicht mit den reelen Zahlen in Widerspruch gerathen werde, wenn man das (§. 150.) beschriebene Ableiten der Gleichungen so ganz allgemein Statt finden lassen wollte, muß man untersuchen

1) ob nicht der Potenz a^b, der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ und dem Logarithmen a?b durch schickliche Definitionen, Bedeutungen gegeben werden können, für den Fall, daß a und b beliebige reele Zahlen sind; und dann

2) ob man nachweisen kann, daß alle die (§. 150. α, β, γ,) angeführte Sätze für diese letztern Potenzen, Wurzeln und Logarithmen noch gelten. — Denn dann würde das Ableiten der Gleichungen nach (§. 150.) für alle reelen Zahlen gelten, also dasselbe ganz allgemein aufgefaßte Ableiten der Gleichungen mit den reelen Zahlen nicht im Widerspruche stehen können.

Allein versucht man es, wie dies nun in der folgenden zweyten Abtheilung dieses Kapitels geschehen wird, diesen Gang durchzuführen, so wird man auf mancherley Beschränkungen und Modifikationen geführt, welche Ursache sind, daß der letzte Endzweck, wie solcher für das erste Kapitel in den (§. §. 29. und 30.), für das zweyte in den (§. §. 63. und 64.), für das dritte Kapitel im (§. 99.), endlich für das fünfte im (§. 147.) bereits erreicht worden ist, für das gegenwärtige Kapitel erst gegen Ende des zweyten Theiles dieses Lehrbuches ganz, und dann noch mit einer Anzahl von Beschränkungen und wohl zu beachtenden Vorsichtsregeln versehen, erreicht seyn wird.

Zweyte Abtheilung.

Erweiterungen und Verallgemeinerungen der Gesetze dieser Mischung.

---

§. 152. Erklärung.

Eine Potenz a^b heißt eine ganze Potenz, wenn a ganz allgemein, dagegen b eine wirkliche (positive ganze) Zahl ist. Die ganze Potenz a^b soll aber noch immer das Produkt $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots$ von b Faktoren andeuten, nur daß, weil a schon ganz allgemein gedacht ist, auch dieses Produkt bereits ein allgemeines geworden ist.

Anmerkung. Die ganze Potenz schließt die frühere wirkliche Potenz, wo a ebenfalls eine wirkliche (positive ganze) Zahl ist, als einen besondern Fall in sich.

§. 153. Zusatz.

Von den ganzen Potenzen gelten noch immer die Sätze der Potenzen, wie früher von den wirklichen, nämlich:

1) $(ab)^c = a^c \cdot b^c$; 2) $(a:b)^c = a^c : b^c$;

3) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$; 4) $a^{b-c} = a^b : a^c$;

5) $(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$.

Denn sie werden genau, wie oben geschehen, erwiesen.

§. 154. Zusatz.

Es ist aber auch noch, wenn b eine wirkliche (positive ganze) Zahl bedeutet

1) $1^b = 1$; 2) $0^b = 0$; 3) $a^{b+1} = a^b \cdot a$;

4) $(-a)^b = \pm a^b$; 5) $(-1)^b = \pm 1$;

wo jedesmal die obern (+) Zeichen gelten, wenn b eine gerade Zahl, die untern (—) Zeichen dagegen, wenn b eine ungerade Zahl ist.

Und sind a und b absolute (positive) ganze oder gebrochene Zahlen, dabey $a > b$, so ist auch $a^c > b^c$, wenn c eine wirkliche (positive ganze) Zahl ist; wie solches (§. 115.) bereits gesagt worden.

Daraus folgt noch, wenn p eine absolute ganze oder gebrochene Zahl vorstellt,

$$p^c \gtreqless 1^c, \quad \text{d. h. } p^c \gtreqless 1,$$

je nachdem $p \gtreqless 1$ ist.

Und da, wenn $p \gtrless 1$ und positiv ist, auch

$$p^2 \gtrless p, \quad p^3 \gtrless p^2, \quad p^4 \gtrless p^3, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

also alle folgenden Potenzen $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ werden als die vorhergehenden, je nachdem $p \gtrless 1$ ist, so folgt, daß p^c dem $\left\{\begin{matrix}\text{Unendlichgroßen}\\\text{oder der Null}\end{matrix}\right\}$ immer näher rückt, je größer c selbst gedacht wird, und je nachdem $p \gtrless 1$ ist. *)

§. 155. Erklärung.

Die Potenz a^b heißt eine Differenz-Potenz, wenn b eine Differenz wirklicher (positiver ganzer) Zahlen $\alpha - \beta$ ist; nnd da, wenn $\alpha > \beta$, $a^b = a^{\alpha-\beta} = a^\alpha : a^\beta$ ist (§. 153. Nr. 4.), so wollen wir unter a^b noch immrr den Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^\beta}$ verstehen, so wohl wenn $\alpha > \beta$, als auch wenn $\alpha \leqq \beta$ seyn sollte. Dabey

---

*) Um diesen Satz recht klar zu übersehen, darf man nur noch folgende Betrachtung hinzufügen.

Es ist allemal

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1+\frac{2}{n},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 > \left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1+\frac{3}{n},$$

u. s. w. f.

also

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^c > 1+\frac{c}{n}.$$

Nimmt man nun $c = dn$, so ist

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^c > 1+d$, wie groß übrigens d und n gedacht seyn mögen.

Ist nun $p > 1$, so kann man $p = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ setzen, und hat dann

$p^c = \frac{1^c}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} < \frac{1}{1+d}$; d. h. p^c kleiner als jede noch so klein gedachte Zahl $\frac{1}{1+d}$.

sind a^{α} und a^{β} ganze Potenzen, welche nach (§. 152.) allgemeine Produkte bedeuten, und für welche die (§. 153.) hingestellten Sätze der Potenzen gelten.

Anmerkung. Nach dieser Erklärung ist die Differenz-Potenz allgemeiner als die ganze Potenz und schließt die ganze Potenz als einen besondern Fall in sich.

§. 156. Zusatz.

Weil aber $\alpha-\beta = (\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) = (\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$ ist; weil also b, wenn es die Differenz $\alpha-\beta$ vorstellt, zugleich die Differenzen $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$ und $(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$ vorstellen wird, weil demnach die vorstehende Erklärung für die Bedeutung der der Potenz a^b

einmal den Quotienten $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}$,

ein andermal den Quotienten $\frac{a^{\alpha+\gamma}}{a^{\beta+\gamma}}$,

und ein drittesmal den Quotienten $\frac{a^{\alpha-\gamma}}{a^{\beta-\gamma}}$

vorstellen wird, so fragt sich zuerst mit Recht, ob diese 3 Bedeutungen einander gleich seyn werden.

Es ist jedoch $a^{\alpha+\gamma} = a^{\alpha}.a^{\gamma}$; $a^{\beta+\gamma} = a^{\beta}.a^{\gamma}$;
eben so $a^{\alpha-\gamma} = a^{\alpha}:a^{\gamma}$ und $a^{\beta-\gamma} = a^{\beta}:a^{\gamma}$;
also sind nach (§. 47. Nr. 10.) diese 3 Quotienten einander gleich.

Die Differenz-Potenz a^b hat also jedesmal eine völlig bestimmte und nur eine einzige Bedeutung. Und deshalb gilt auch noch der Satz:

Gleiches mit Gleichem potenzirt, gibt wieder Gleiches, wenn auch die entstehenden Potenzen Differenz-Potenzen sind.

§. 157. Zusatz.

Nach dieser Erklärung muß man sich aber unter a^0 den Quotienten $\frac{a^{\alpha}}{a^{\alpha}}$ d. h. **1** denken, weil $0 = \alpha-\alpha$ ist. Und unter

a^1 hat man sich den Quotienten $\frac{a^{\alpha+1}}{a^\alpha}$ d. h. $\frac{a^\alpha . a}{a^\alpha}$ d. h. a selbst zu denken, weil $1 = (\alpha+1)-\alpha$ ist. Ferner hat man sich unter $a^{-\beta}$ den Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^{\alpha+\beta}}$ d. h. $\frac{a^\alpha}{a^\alpha . a^\beta}$ d. h. $\frac{1}{a^\beta}$ zu denken, weil $-\beta = \alpha-(\alpha+\beta)$ ist.

Man hat also,

1) $a^0 = 1$; auch $0^0 = 1$, auch $1^0 = 1$;

2) $a^1 = a$; auch $0^1 = 0$, auch $1^1 = 1$;

3) $a^{-\beta} = \frac{1}{a^\beta}$, auch $0^{-\beta} = \frac{1}{0^\beta} = \frac{1}{0}$, auch $1^{-\beta} = \frac{1}{1^\beta} = 1$;

wenn nur β eine wirkliche (positive, ganze) Zahl bedeutet.

Anmerknng. Es könnte den Anfänger befremden, daß nach dieser Definition, wenn man a in Null übergehen läßt, dann Null im Nenner erscheint, während doch früher Null im Nenner nicht zugelassen wurde. Allein man bedenke nur, daß das gegenwärtige bloße Feststellung der Bezeichnung ist, und daß hier recht gut festgestellt werden kann, daß 0^b das bedeuten soll, was a^b bedeutet für den Fall, daß 0 (Null) statt a gesetzt wird. Daraus folgt ja nun noch nicht, daß man mit solchen Ausdrücken, wo 0 (Null) im Nenner vorkommt, arbeiten wolle oder dürfe.

§. 158. Zusatz.

Es entsteht nun die Frage, ob die Lehrsätze der Potenzen (§. 153.), auch noch gelten, wenn die Potenzen alle, solche Differenz-Potenzen sind. Und man findet, genau dem (§. 91.) folgend, daß sie alle für Differenz-Potenzen noch gelten.

Gesetzt, man wolle untersuchen, ob noch immer $a^{b+c} = a^b . a^c$ seyn werde, auch wenn b die Differenz $\alpha-\beta$ uud c die Differenz $\gamma-\delta$, also $b+c$ die Differenz $(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)$ bedeuten, so will man nichts anders wissen, als ob

$$\frac{a^{\alpha+\gamma}}{a^{\beta+\delta}} = \frac{a^\alpha}{a^\beta} \cdot \frac{a^\gamma}{a^\delta}$$

seyn werde; und daß dem so ist, folgt doch augenblicklich aus (§. 74.) und (§. 153. Nr. 3.), welcher letztere für die hier vorkommenden ganzen Potenzen a^α, a^γ, a^β, a^δ als gültig bereits nachgewiesen worden ist.

Aus $a^{b-c} \cdot a^c = a^{b-c+c} = a^b$, welche so eben für Differenz-Potenzen als richtig erkannt ist, geht dann, durch a^c dividirend,

auch $a^{b-c} = a^b : a^c$ hervor.

Will man untersuchen, ob $(ab)^c = a^c \cdot b^c$ ist, unter der Voraussetzung, daß $c = \alpha - \beta$, so will man nichts anders wissen, als ob

$$\frac{(ab)^\alpha}{(ab)^\beta} = \frac{a^\alpha}{a^\beta} \cdot \frac{b^\alpha}{b^\beta}$$ seyn werde;

und daß dem so ist, folgt unmittelbar aus (§. 153. Nr. 1.).

Aus $$\left(\frac{a}{b}\right)^c \cdot b^c = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^c = a^c,$$

wie solches so eben erwiesen worden ist, folgt aber, durch b^c dividirend,

auch $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$; ebenfalls für den Fall, daß c eine beliebige Differenz ganzer Zahlen ist.

Und will man endlich untersuchen, ob noch immer

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

seyn werde, auch wenn $b = \alpha - \beta$ und $c = \gamma - \delta$, also

$$bc = (\alpha\gamma + \beta\delta) - (\alpha\delta + \beta\gamma)$$

ist, so bedenke man, daß wir unter $(a^b)^c$ den Quotienten $\frac{(a^b)^\gamma}{(a^b)^\delta}$ uns vorstellen, so wie unter a^b den Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^\beta}$ oder $a^\alpha : a^\beta$;

und unter a^{bc} den Quotienten $\frac{a^{\alpha\gamma+\beta\delta}}{a^{\alpha\delta+\beta\gamma}}$. —

Die Frage ist also keine andere, als die: ob nämlich

$$\frac{(a^\alpha : a^\beta)^\gamma}{(a^\alpha : a^\beta)^\delta} = \frac{a^{\alpha\gamma+\beta\delta}}{a^{\alpha\delta+\gamma\beta}}$$ seyn werde oder nicht,

wo jetzt die hier vorkommenden Potenzen lauter ganze Potenzen sind, für welche dieselben Formeln (§. 153.) bereits gelten und angewandt werden können.

Es ist aber $(a^\alpha : a^\beta)^\gamma = a^{\alpha\gamma} : a^{\beta\gamma}$ (§. 153. Nr. 2. und Nr. 5.).

$(a^\alpha : a^\beta) = a^{\alpha\delta} : a^{\beta\delta}$

und $$\frac{(a^\alpha : a^\beta)^\gamma}{(a^\alpha : a^\beta)^\delta} = \frac{a^{\alpha\gamma}}{a^{\beta\gamma}} : \frac{a^{\alpha\delta}}{a^{\beta\delta}} = \frac{a^{\alpha\gamma} \cdot a^{\beta\delta}}{a^{\beta\gamma} \cdot a^{\alpha\delta}} = \frac{a^{\alpha\gamma+\beta\delta}}{a^{\beta\gamma+\alpha\delta}},$$

welches nachzuweisen war.

§. 159. Zusatz.

Sind a und b absolute Zahlen und $a > b$, so ist

$$a^c \gtreqless b^c,$$

je nachdem c positiv ganz, Null, oder negativ ganz ist.

Denn ist $c = -\alpha$, wo α eine wirkliche (positive ganze) Zahl vorstellt, so ist $a^c = \frac{1}{a^\alpha}$, nach (§. 157. Nr. 3.), und $b^c = \frac{1}{b^\alpha}$; dabey nach (§. 115.):

$$a^\alpha > b^\alpha,$$

demnach, wie (§. 113. Nr. 6.) lehrt, $\frac{1}{a^\alpha} < \frac{1}{b^\alpha}$ d. h. $a^c < b^c$. — Das übrige erhellet aus (§. 154.).

§. 160. Erklärung.

Wenn a eine absolute (positive) ganze oder gebrochene Zahl oder Null, b dagegen eine wirkliche (positive ganze) Zahl ist, so heiße die Wurzel

$$\sqrt[b]{a}$$

eine absolute und bedeute die absolute ganze oder gebrochene Zahl oder die Null, welche mit b potenzirt, a wiedergibt.

Anmerkung. Diese absolute Wurzel enthält die frühere wirkliche Wurzel, wo a ebenfalls eine wirkliche (positive ganze) Zahl war, und wo auch $\sqrt[b]{a}$ selbst eine solche bezeichnete (daher nicht immer möglich war), als einen besondern Fall in sich.

Zu gleicher Zeit erhellet, daß man die Definition der Wurzel zugleich für den Fall erweitert geben könnte, wo b eine Differenz wirklicher Zahlen ist. Weil aber solche Wurzeln keine praktischen Vortheile gewähren, so ist hier der beschränktere Begriff gegeben worden.

§. 161. Zusatz.

Es fragt sich nun wieder zunächst 1) ob die absolute Wurzel $\sqrt[b]{a}$ (des §. 160.) allemal eine Bedeutung hat, und 2) ob allemal auch nur eine einzige Bedeutung.

Es ist aber, wenn p und q absolute (ganze oder gebrochene positive) Zahlen sind und $p > q$ ist, auch allemal, weil b eine positive ganze Zahl seyn soll, nach (§. 154.) $p^b > q^b$. — Existirt also eine absolute Zahl x, so daß $x^b = a$ wird, so hat weder eine größere noch eine kleinere Zahl dieselbe Eigenschaft, weil die erstere mit b potenzirt, mehr als x^b, die andere mit b poten-

zirt dagegen weniger als x^b geben wird. Hat demnach die absolute Wurzel $\sqrt[b]{a}$ wirklich eine Bedeutung, so hat sie doch immer nur eine einzige.

Was aber die erste Frage anbelangt, so wissen wir, daß wenn z. B. a selber eine ganze Zahl ist, dann nicht immer eine ganze Zahl existirt, welche mit b potenzirt, a geben könnte (nach §. 134. Nr. 1.); und eben so wissen wir, daß eine gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$ wenn sie mit b potenzirt wird, nie eine ganze Zahl a geben kann (nach §. 132. Nr. 7.); daß also für die meisten Werthe von a in ganzen Zahlen, weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl existiren wird, welche unter $\sqrt[b]{a}$ gedacht werden kann. Eben so wissen wir, daß wenn a eine gebrochene Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$ ist, in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt, dann auch keine ganze und keine gebrochene Zahl existirt, die mit b potenzirt, a oder $\frac{\alpha}{\beta}$ geben könnte, als nur in dem Fall, wo $\sqrt[b]{\alpha}$ und $\sqrt[b]{\beta}$ selbst (ganze positive) wirkliche Zahlen sind (nach §. 132.), d. h. wo α und β auf die Form γ^b und δ^b gebracht werden können, und wo dann $\sqrt[b]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\gamma}{\delta}$ allemal eine gebrochene Zahl ist.

Anmerkung. Auf der andern Seite dagegen kann man sich zwischen 0 und 1 die gebrochenen Zahlen stetig wachsend denken; und es scheint dann, als wenn die bten Potenzen dieser stetig wachsenden Reihe, ebenfalls eine stetig wachsende Reihe von gebrochenen Zahlen bilden müßten. Und weil dasselbe wieder zwischen 1 und 2, 2 und 3, u. s. w. f. gelten zu können scheint, so scheint es, als wenn die bten Potenzen einer von 0 bis in's Unendliche stetig fort wachsend gedachten Reihe, ebenfalls eine stetig wachsende Reihe von ganzen und gebrochenen Zahlen bilden müßten, so daß jede gegebene ganze oder gebrochene Zahl a sich darunter befinden könnte. — Diese Betrachtung veranlaßt eine Untersuchung und diese Untersuchung führt uns zu folgendem.

§. 162. Lehrsatz.

Ist a eine beliebige gegebene ganze oder gebrochene absolute (positive) Zahl, b dagegen eine wirkliche (positive ganze) Zahl, und gibt es weder eine ganze noch eine in endlichen Zahlen ausgedrückte gebrochene Zahl, welche unter $\sqrt[b]{a}$ verstanden werden müßte, d. h. welche mit b potenzirt, genau a geben könnte, so lassen sich doch ohne Ende fort Paare von gebrochenen Zahlen finden, welche in immer größern und größern Zahlen ausgedrückt erscheinen und von denen jedes einzelne folgende Paar unter sich immer weniger verschieden ist, als die Differenz des nächst vorhergehenden Paares beträgt, wo ferner die Differenzen zwischen einem der folgenden Paare kleiner werden können, als jede noch so klein gegebene Zahl, und wo jedes Paar die Eigenschaft hat, daß die eine mit b potenzirt, weniger gibt als a, die andre dagegen, wenn sie mit b potenzirt wird, mehr gibt als a.

Beweis. Denn man denke sich eine beliebige wirkliche Zahl n, so ist $a = \frac{a \cdot n^b}{n^b}$. Nun gibt es auf jeden Fall (nach Ende des §. 154.) zwey zunächst auf einander folgende positive ganze Zahlen, wovon die eine durch W_n bezeichnet seyn mag, so daß

$$(W_n)^b < a \cdot n^b \quad \text{und} \quad (W_n + 1)^b > a \cdot n^b.$$

Dann ist nach (§. 113. Nr. 5 und §. 153. Nr. 2.)

$$\left(\frac{W_n}{n}\right)^b < a \quad \text{und} \quad \left(\frac{W_n + 1}{n}\right)^b > a,$$

Und $\frac{W_n}{n}$ so wie $\frac{W_n + 1}{n}$

bilden also ein Paar solcher gebrochenen Zahlen; die kleinere $\frac{W_n}{n}$ mit b potenzirt, gibt weniger wie a, die größere $\frac{W_n + 1}{n}$ mit b potenzirt, gibt mehr als a; und die Differenz zwischen beyden ist

$$\frac{W_n + 1}{n} - \frac{W_n}{n} \text{ d. h. } \frac{1}{n}.$$

Nun denke man sich nach und nach statt n alle ganzen Zahlen gesetzt, von der 2 ab bis in's Unendliche, so stellen obige gebrochene Zahlen $\frac{W_n}{n}$ und $\frac{W_n + 1}{n}$, unendlich viele solcher Paare von Zahlen vor, in

immer größern und größern Zahlen ausgedrückt, und deren Differenz $\frac{1}{n}$ immer kleiner wird, je größer n ist; so daß diese Differenz kleiner werden kann, als jede noch so kleine, aber bestimmt gegebene Zahl.

§. 163. Zusatz.

In Bezug auf vorstehenden Lehrsatz existirt also, welche absolute ganze oder gebrochene Zahl a vorstellen mag, doch immer in der Idee eine gebrochene Zahl, deren Zähler und Nenner aber nie angebbar ist (weil beyde unendlich groß gedacht werden müssen) und welche durch $\sqrt[b]{a}$ vorgestellt ist, d. h. welcher die Eigenschaft zukommt, daß wenn man solche mit b potenzirt denkt, dann a herauskommt. — Diese nur in der Idee lebende, der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ gleiche, gebrochene Zahl heißt eine irrationale Wurzel; und jede auf ähnliche Weise nur in der Idee existirende, und, weil sie einen unendlich großen Zähler und Nenner hat, nie angebbare gebrochene Zahl, heißt überhaupt eine irrationale Zahl. — Die ganzen oder in endlichem Zähler und Nenner ausgedrückten gebrochenen Zahlen heißen dagegen rationale.

In der Theorie denkt man sich also unter $\sqrt[b]{a}$, wenn sie irrational ist, immer die irrationale Zahl selbst, als eine in der Idee existirende, in der Wirklichkeit aber nicht herstellbare gebrochene Zahl, welche $\sqrt[b]{a}$ genau gleich ist. In der Anwendung dagegen setzt man statt $\sqrt[b]{a}$ einen der unendlich vielen kleinern oder größern Näherungswerthe

$$\frac{W_n}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{W_n+1}{n},$$

welche unter sich um $\frac{1}{n}$, also von $\sqrt[b]{a}$ selbst um weniger als $\frac{1}{n}$ verschieden sind, welche also der $\sqrt[b]{a}$ desto näher kommen, je größer n genommen wird.

§. 164. Zusatz.

Es hat demnach die absolute Wurzel allemal einen bestimmten, aber auch nur einen einzigen Werth.

Und eben deswegen gilt auch noch der Satz, daß „Gleiches durch Gleiches radizirt auch dann noch gleiche Resultate liefert, wenn die entstehenden Wurzeln solche (§. 160.) definirte absolute Wurzeln sind.

§. 165. Zusatz.

Dabey ist zugleich

$$1)\ (\sqrt[b]{a})^b = a, \qquad 2)\ \sqrt[b]{(a^b)} = a,$$

$$3)\ \sqrt[b]{1} = 1, \qquad 4)\ \sqrt[b]{0} = 0,$$

wenn nur b eine ganze positive Zahl, und a eine absolute (positive ganze oder gebrochene) Zahl ist.

§. 166. Zusatz.

Sind a und b absolute ganze oder gebrochene Zahlen, und überdieß $a > b$, so ist auch $\sqrt[c]{a} > \sqrt[c]{b}$.

Denn wäre $\sqrt[c]{a} \lessgtr \sqrt[c]{b}$,

so wäre auch $(\sqrt[c]{a})^c \lessgtr (\sqrt[c]{b})^c$

d. h. $a \lessgtr b$, nach (§. 115.).

Ist also p eine absolute Zahl, so ist auch

$$\sqrt[c]{p} \gtrless \sqrt[c]{1}, \text{ d. h. } \sqrt[c]{p} \gtrless 1,$$

je nachdem $p \gtrless 1$ ist.

§. 167. Zusatz.

Ist man über die Bedeutung der absoluten Wurzel im Reinen, so entsteht die andere Frage: ob alle die Sätze der Wurzeln,

namentlich die Sätze der (§. §. **136** und **149.**) noch gelten, wenn die Wurzeln absolute Wurzeln, und die Potenzen Differenz-Potenzen sind. Und da findet man, dieselben dort geführten Beweise wiederholend, daß sie allerdings gelten, so lange nur die Wurzeln und die Potenzen und die Logarithmen, die in dem vorhergehenden festgestellte Bedeutung haben. —

Namentlich gilt also die Formel

$$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{(a^b)}$$

nur dann, wenn $\frac{b}{c}$ eine (positive oder negative) ganze Zahl oder Null ist, während c eine positive ganze Zahl, a dagegen eine absolute (ganze oder gebrochene) Zahl seyn muß.

§. 168. Erklärung.

Aber eben weil, so oft $\frac{b}{c}$ eine (positive oder negative) ganze Zahl ist, $a^{b:c} = \sqrt[c]{(a^b)}$ ist, so können wir diese Gleichung zur Definiton der reelen Potenz benützen.

Wir nennen nämlich die Potenz a^b eine reele Potenz, wenn a eine ganze oder gebrochene absolute (positive) Zahl oder Null ist, b dagegen die Form $\frac{\alpha}{\beta}$ hat, wo β eine positive ganze Zahl, dagegen α eine Differenz $\gamma - \delta$, positiver ganzer Zahlen ist,

daß $\frac{\alpha}{\beta}$ jede reele Zahl, d. h. jede positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl vorstellt, oder auch **0** (Null). Und wir stellen uns unter dieser reelen Potenz die absolute Wurzel $\sqrt[\beta]{(a^\alpha)}$ vor, welche allemal nur eine einzige, aber auch jedesmal eine völlig bestimmte Bedeutung hat, nach (§. **164.**), wenn nur a^α Null oder eine absolute Zahl ist, (also den Fall ausgenommen, wo α negativ und a zu gleicher Zeit Null ist.).

§. 169. Zusatz.

Es entsteht jedoch noch die zweite Frage, ob nämlich die reele Potenz auch allemal eine einzige völlig bestimmte Bedeutung habe. Was aber diese Frage betrifft, so ist $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\alpha:\delta}{\beta:\delta}$, wo $\beta\gamma$ und $\beta:\delta$ ebenfalls wieder ganze positive Zahlen seyn können, während auch $\alpha\gamma$ und $\alpha:\delta$ wiederum Differenzen ganzer positiver Zahlen, d. h. ganze positive oder ganze negative Zahlen oder Null seyn können. In den Quotienten $\frac{\alpha}{\beta}$ bedeutet, kann auch der Quotient $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}$ oder $\frac{\alpha:\delta}{\beta:\delta}$ dafür gesetzt werden, und dann hat die reele Potenz a^b

einmal die Bedeutung $\sqrt[\beta]{(a^\alpha)}$,

ein andermal die Bedeutung $\sqrt[\beta\gamma]{(a^{\alpha\gamma})}$,

und ein drittesmal die Bedeutung $\sqrt[\beta:\delta]{(a^{\alpha:\delta})}$;

und jedesmal nach (§. 149. Nr. 42.) eine und dieselbe Bedeutung.

Es ist also die reele Potenz jedesmal nur eindeutig, und deshalb gilt auch der Satz noch „daß Gleiches mit Gleichem potenzirt, Gleiches gibt," auch wenn die entstehenden Potenzen solche reele Potenzen sind.

§. 170. Zusatz.

Hernach fragt sich ferner, ob die Sätze der Potenzen (§. 136. und §. 149.) also namentlich die Sätze (§. 153.) auch noch für diese reelen Potenzen gelten; und auch auf diese Frage kann bejahend geantwortet werden.

Will man z. B. untersuchen, ob noch immer

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$$

seyn werde, auch wenn $b = \frac{\alpha}{\beta}$ und $c = \frac{\gamma}{\delta}$, also $b+c = \frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}$ ist, wo β und δ und also auch $\beta\delta$ ganze positive Zahlen, dagegen α und

γ und dann auch $\alpha\delta + \beta\gamma$ Differenzen ganzer positiver Zahlen sind, so will man nichts anders untersuchen, als ob seyn werde

$$\sqrt[\beta\delta]{(a^{\alpha\delta+\beta\gamma})} = \sqrt[\beta]{(a^{\alpha})} \cdot \sqrt[\delta]{(a^{\gamma})}.$$

Nun ist aber nach (§. 149. Nr. 42.):

$$\sqrt[\beta]{(a^{\alpha})} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\delta}} \text{ und } \sqrt[\delta]{(a^{\gamma})} = \sqrt[\beta\delta]{(a^{\beta\gamma})},$$

so daß die Richtigkeit der vorstehenden Gleichung augenblicklich aus (§. 149. Nr. 11. und §. 167.) hervorgeht.

Will man untersuchen, ob noch immer

$$(ab)^c = a^c \cdot b^c$$

seyn werde, auch wenn $c = \frac{\alpha}{\beta}$ ist, so will man eigentlich wissen, ob

$$\sqrt[\beta]{(ab)^{\alpha}} = \sqrt[\beta]{(a^{\alpha})} \cdot \sqrt[\beta]{(b^{\alpha})}$$ seyn werde,

welche Gleichung nach (§. 149. Nr. 11. und Nr. 3. und §. 158.) augenblicklich als eine richtige erkannt wird.

Will man ferner untersuchen, ob noch immer

$$(a^b)^c = a^{bc}$$

seyn wird, auch wenn $b = \frac{\alpha}{\beta}$ und $c = \frac{\gamma}{\delta}$, also $bc = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$ ist, so will man eigentlich wissen, ob

$$\sqrt[\delta]{\left([\sqrt[\beta]{(a^{\alpha})}]^{\gamma}\right)} = \sqrt[\beta\delta]{(a^{\alpha\gamma})}$$

ist. Nun ist aber nach (§. 136. Nr. 2. §. 149. Nr. 7. und §. §. 158. 167.): $[\sqrt[\beta]{(a^{\alpha})}]^{\gamma} = \sqrt[\beta]{(a^{\alpha\gamma})}$; und dann nach (§. 149. Nr. 15. und §. 167.) $\sqrt[\delta]{[\sqrt[\beta]{(a^{\alpha\gamma})}]} = \sqrt[\beta\delta]{a^{\alpha\gamma}}$; also fällt die Richtigkeit der obigen Gleichung in die Augen.

Und weil für reele Potenzen

$$a^{b-c} \cdot a^c = a^{b-c+c} = a^b$$

und $$\left(\frac{a}{b}\right)^c \cdot b^c = \left(\frac{a}{b} \cdot b\right)^c = a^c,$$

bereits als wahr anerkannt sind, so folgt auch, wenn man diese Gleichungen auf beyden Seiten beziehlich durch a^c oder b^c dividirt:

$$a^{b-c} = a^b : a^c;$$

$$(a:b)^c = a^c : b^c.$$

Auf dieselbe Weise läßt sich aber ebenfalls noch nachweisen, daß auch die Formeln (§. 136. und §. 149.) alle richtig sind und gelten, so oft nur die Wurzeln und die Potenzen alle, solche eindeutige absolute Wurzeln und reele Potenzen und die Logarithmen wirkliche (positive ganze) Zahlen vorstellen.

§. 171. Zusatz.

Ferner ist noch, wenn c eine beliebige reele Zahl ist:

1) $1^c = 1$,

2) $0^c \doteq 0$, oder $= 1$, oder $= \frac{1}{0}$, je nachdem c positiv, Null oder negativ ist.

Und sind noch a und b absolute ganze oder gebrochene Zahlen, dabey

$$a > b,$$

so ist

$$a^c \gtreqless b^c,$$

je nachdem c positiv, Null oder negativ ist.

Sind ferner c und d zwey beliebige reele Zahlen, dabey $c > d$, so ist auch

$$p^c \gtreqless p^d,$$

je nachdem $p \gtreqless 1$, dabey aber jedesmal absolut ist.

Ist nämlich $c = \pm \frac{\alpha}{\beta}$, so ist

$$a^c = \sqrt[\beta]{(a^{\pm\alpha})} \quad \text{und} \quad b^c = \sqrt[\beta]{(b^{\pm\alpha})}.$$

Nun ist aber, weil $a > b$,

auch $a^{\pm\alpha} \gtreqless b^{\pm\alpha}$, d. h. $a^{+\alpha} > b^{+\alpha}$ und $a^{-\alpha} < b^{-\alpha}$, nach (§. 159.); also auch nach (§. 166.)

$\sqrt[\beta]{(a^{\pm\alpha})} \gtreqless \sqrt[\beta]{(b^{\pm\alpha})}$ d. h. $a^c \gtreqless b^c$, je nachdem c positiv oder negativ ist.

Endlich ist, wenn $c > d$, $c - d$ positiv, etwa $= \frac{\alpha}{\beta}$, also $\frac{p^c}{p^d} = p^{c-d} = p^{\alpha:\beta} = \sqrt[\beta]{(p^\alpha)}$ nothwendig positiv und $\gtreqless 1$, je nachdem $p \gtreqless 1$ ist.

Ist aber $\frac{p^c}{p^d} \gtreqless 1$, wenn $p \gtreqless 1$, so ist auch, nach (§. 113. Nr. 4.), zu gleicher Zeit

$$p^c \gtreqless p^d, \text{ wenn } p \gtreqless 1 \text{ ist.}$$

§. 172. Erklärung.

An den Begriff der reelen Potenz, schließt sich der des reelen Logarithmen unmittelbar an. Wir nennen nämlich den Logarithmen a?b einen reelen, wenn a und b absolute (positive ganze oder gebrochene) Zahlen sind, und die reele Zahl darunter verstanden wird, mit welcher die Basis b potenzirt, den Logarithmanden a wiedergibt. — Denselben reeleu Logarithmen bezeichnet man meist so: $\overset{b}{log}$ a, und läßt wohl auch häufig die Basis b aus dem Zeichen ganz weg, so daß man bloß schreibt *log* a, und die Basis b sich noch dazu denkt.

§. 173. Zusatz.

Es entstehen wieder die Fragen: 1) Hat der reele Logarithme a?b oder $\overset{b}{log}$ a allemal eine Bedeutung für je zwey absolute Zahlen, die statt a und statt b gesetzt werden mögen? — und 2) hat er auch jedesmal eine völlig bestimmte, d. h. nur eine einzige Bedeutung.

Es ist aber nach (§. 171.) $b^c \gtrless b^d$, wenn $c \gtrless d$ und $b \gtrless 1$ ist; dagegen ist $b^c = b^d$, wenn $b = 1$ ist. Ist also die Basis b, $= 1$, so gibt es unendlich viele reele Zahlen c, d, ꝛc., welche alle von einander verschieden sind, und doch so, daß b^c, b^d, ꝛc. immer 1 wird. Für $b = 1$, hat also a?b entweder keinen Werth, oder unendlich viele einander nicht gleiche, je nachdem a von 1 verschieden oder $= 1$ ist. Ist aber die Basis $b \gtrless 1$, so geben verschiedene reele Zahlen c, d, ꝛc. auch verschiedene Potenzen b^c, b^d, ꝛc.; also hat dann der reele Logarithme a?b, wenn er eine Bedeutung hat, jedesmal nur eine einzige. —

Daß aber, wenn man diejenigen gebrochenen Zahlen zuläßt, welche (§. 163.) irrationale Zahlen genannt worden sind, der reele Logarithme a?b oder $\overset{b}{log}$ a allemal einen (reelen) Werth habe, den Ausnahmsfall abgerechnet, wo die Basis b, $= 1$ ist, läßt sich durch nachstehenden Lehrsatz außer Zweifel setzen.

§. 174. Lehrsatz.

Wenn es keine ganze und auch keine mit endlichem Zähler und Renner versehene gebrochene, übrigens (positive oder negative) Zahlen geben sollte, welche unter dem reelen Logarithmen $a?b$ oder $\overset{b}{log}\, a$ zu verstehen sind, so lassen sich doch, je nachdem man statt n nach und nach jede ganze positive Zahl genommen denkt, jedesmal unendlich viele durch $\frac{\pm W_n}{n}$ und $\frac{\pm(W_n+1)}{n}$ vorgestellte Paare von reelen Werthen finden (beyde zugleich positiv, oder beyde zugleich negativ), deren Unterschied $\frac{1}{n}$ immer kleiner und kleiner wird, je größer man n genommen sich denkt, und welche die Eigenschaft haben, daß wenn man b mit jeder von beyden potenzirt, die eine mehr, die andere weniger als a gibt; wenn nur $b \gtrless 1$ ist.

Beweis. Ist nämlich $b>1$, so erreichen nach (§. 154.) die Potenzen b^0, b^1, b^2, b^3, b^4, ꝛc. ꝛc. ꝛc. jede noch so große gegebene Zahl, also auch, wenn zugleich $a>1$ ist, die Zahl a^n; d. h. die Zahl a^n wird zwischen zweyen nächst auf einander folgenden dieser Potenzen b^0, b^1, b^2, b^3, b^4, ꝛc., etwa zwischen b^{W_n} und b^{W_n+1} liegen. Und ist $b<1$, so ist $\frac{1}{b}>1$, also die Zahl a^n wiederum zwischen zweyen zunächst auf einander folgenden der Potenzen $\left(\frac{1}{b}\right)^2, \left(\frac{1}{b}\right)^3, \left(\frac{1}{b}\right)^4$, ꝛc., also etwa zwischen $\left(\frac{1}{b}\right)^{W_n}$ und $\left(\frac{1}{b}\right)^{W_n+1}$ d. h. zwischen $\frac{1}{b^{W_n}}$ und $\frac{1}{b^{W_n+1}}$ d. h. zwischen b^{-W_n} und $b^{-(W_n+1)}$ (nach §. 157. Nr. 3.).

Es gibt also immer, mag $b \gtrless 1$ seyn, zwey zunächst auf einander folgende Zahlen, W_n und W_n+1, wovon die erstere W_n jedoch auch (Null) 0 seyn kann, so daß

$$b^{\pm W_n} < a^n \text{ und } b^{\pm(W_n+1)} > a^n \text{ ist, wenn nur } a>1.$$

Dann ist aber auch nach (§. 166.)

$$\sqrt[n]{(b^{\pm W_n})} < a \quad \text{und} \quad \sqrt[n]{[b^{\pm(W_n+1)}]} > a$$

d. h. $$b^{\frac{\pm W_n}{n}} < a \quad \text{und} \quad b^{\frac{\pm(W_n+1)}{n}} > a;$$

und $\frac{\pm W_n}{n}$, so wie $\frac{\pm(W_n+1)}{n}$, sind also zwey Werthe (positiv, wenn $b>1$, negativ wenn $b<1$ ist), zwischen denen $a?b$ oder $\overset{b}{log}\, a$ liegen muß, wenn nur $a>1$. —

Ist aber $a<1$, so ist $\frac{1}{a}>1$, und dann lassen sich zwey Werthe $\pm\frac{W_n}{n}$ und $\pm\frac{W_n+1}{n}$ finden, so daß $b^{\frac{\pm W_n}{n}}<\frac{1}{a}$ und $b^{\frac{\pm W_n+1}{n}}>\frac{1}{a}$ wird. Weil aber $b^{-z}=\frac{1}{b^z}$ ist, so ist $b^{-z}=q$, wenn $b^z=\frac{1}{q}$ und $b^{+z}=q$, wenn $b^{-z}=\frac{1}{q}$ seyn sollte. Da ferner, wenn $\frac{1}{q}\gtrless\frac{1}{a}$ ist, dann $q\lessgtr a$ seyn muß, so folgt, daß, weil

$$b^{\frac{\pm W_n}{n}}<\frac{1}{a} \text{ und } b^{\frac{\pm W_n+1}{n}}>\frac{1}{a} \text{ ist}$$

auch $b^{\frac{\pm W_n}{n}}>a$ und $b^{\frac{\pm W_n+1}{n}}<a$ seyn werde,

wenn nur $a<1$, und wenn man nur die obern (+ oder —) Zeichen gelten läßt, im Falle $b>1$, die untern dagegen, so oft $b<1$ ist.

Mag also $a\gtrless 1$ seyn, so sind doch allemal

$$\pm\frac{W_n}{n} \quad \text{und} \quad \pm\frac{W_n+1}{n}$$

zwey Werthe, zwischen denen $a?b$ oder $\overset{b}{log}\, a$ liegen muß, für jede positive Basis b, die nicht gerade 1 ist.

§. 175. Zusatz.

Es existirt also immer, wenigstens in der Idee, eine absolute ganze oder gebrochene (rationale oder irrationale) Zahl, welche unter dem reelen Logarithmen $a?b$ oder $\overset{b}{log}\, a$ vorgestellt ist, und auch jedesmal nur eine einzige, wenn nur $b\gtrless 1$ ist.

Und zwar hat die Untersuchung des vorhergehenden Paragraphen ergeben, daß wenn die Basis $b>1$ ist, dann der Werth des reelen Logarithmen $a?b$ oder $\overset{b}{log}\, a$, positiv, 0 (Null) oder negativ ist, je nachdem $a>1$ oder $a=1$ oder $a<1$ seyn sollte; und daß, wenn die Basis $b<1$ ist, dann der Werth des reelen

Logarithmen a?b oder $\overset{b}{log}$ a negativ, 0 (Null) oder positiv ist, je nachdem $a > 1$ oder $a = 1$ oder $a < 1$ gegeben seyn sollte.

Und sind c und d positive ganze oder gebrochene Zahlen, so wie auch b, dabey aber $c > d$, so ist auch, $c?b \gtreqless d?b$ d. h. $\overset{b}{log}\ c \gtreqless \overset{b}{log}\ d$, je nachdem $b \gtreqless 1$ ist.

Denn wäre unter der Voraussetzung daß $b > 1$ ist, $c?b \lesseqgtr d?b$, so wäre auch nach (§. 171.) $b^{c?b} \lesseqgtr b^{d?b}$ d. h. $c \lesseqgtr d$, was gegen die Voraussetzung.

Wäre aber unter der Voraussetzung, daß $b < 1$ ist, $c?b \gtreqless d?b$, so wäre auch nach (§. 171.) $b^{c?b} \gtreqless b^{d?b}$ d. h. wiederum $c \gtreqless d$, was abermals gegen die Voraussetzung ist.

§. 176. Zusatz.

Damit aber jeder reele Logarithme wirklich jedesmal eine Bedeutung habe und jedesmal auch nur eine einzige, so wollen wir hier ein für allemal nur solche reele Logarithmen zulassen, deren Basis nicht gerade 1 ist. Was nun für reele Logarithmen entwickelt wird, gilt nur für solche, deren Basis nicht 1 ist; und wenn daher bey einer Untersuchung Logarithmen vorkommen sollten, deren Basis noch unbestimmt und b ist, diese Basis b aber nachher in einem speziellen Falle der Anwendung gerade 1 werden sollte, so ist das vorher gefundene allgemeine Resultat nicht als für diesen Fall nothwendig wahr anzusehen, sondern dieselbe Untersuchung für diesen besondern Fall noch besonders anzustellen. (Vgl. §. §. 95.—97.).

Diese Einschränkung vorausgesetzt, gilt dann auch der Satz, daß Gleiches durch Gleiches logarithmirt, wiederum Gleiches liefert, noch für den Fall, daß man absolute ganze oder gebrochene Zahlen durch einander logarithmirt, also reele Logarithmen erhalten habe.

§. 177. Zusatz.

Endlich geht noch hervor

$$1)\ b^{a?b} = a,\quad 2)\ b^{a}?b = a,\quad 3)\ \overset{a?b}{\surd} a = b,\quad 4)\ a?\overset{b}{\surd} a = b$$

$$5)\ b?b = 1 \quad \text{oder} \quad \overset{b}{log}\ b = 1,$$

so wie auch (§. 175.) bereits

$$6)\ 1?b = 0 \quad \text{oder} \quad \overset{b}{log}\ 1 = 0$$

gefunden worden ist.

§. 178. Zusatz.

Zuletzt muß noch untersucht werden, ob die Formeln der Logarithmen (§. 136. und §. 149.) auch noch für reele Logarithmen gelten? — Und da findet sich, daß man die dort gegebenen Beweise wörtlich wiederholen kann, wenn nur alle vorkommenden Potenzen und Wurzeln und Logarithmen solche sind, welchen nach dieser Abtheilung eine bestimmte und einzige Bedeutung zukommt. Also gelten jene Lehrsätze alle, auch für diese reelen Logarithmen.

Zugleich erhellet aus (§. 149. Nr. 41.), daß

$$\frac{a?c}{b?c} = a?b = \frac{a?d}{b?d} \qquad \text{oder} \qquad a?c : b?c = a?d : b?d$$

$$\text{oder} \quad \overset{c}{log}\ a : \overset{c}{log}\ b = \overset{d}{log}\ a : \overset{d}{log}\ b$$

d. h. die Logarithmen zweyer Zahlen a und b, beyde für zwey verschiedene Basen c und d genommen, stehen in (geometrischer) Proportion.

Anmerkung. Bey dem Schluße dieser Theorie der reelen Potenzen, absoluten Wurzeln und reelen Logarithmen, wollen wir noch auf folgende zwey Punkte aufmerksam machen.

1) Statt einer jeden absoluten Wurzel $\overset{b}{\surd} a$, kann man nach (§. 168.) die reele Potenz $a^{\frac{1}{b}}$ setzen. — Aus diesem Gesichts-Punkte kann man in den Formeln die Wurzeln ganz vermeiden, so daß man bloß mit (reelen) Potenzen zu rechnen hat. — Von diesem Gesichtspunkte aus reihen sich auch viele Formeln der Wurzeln für das Gedächtniß näher an

einander, und näher an früher schon bekannte Formeln der Quotienten oder Brüche. — So ist z. B.

$$\sqrt[\beta]{a^{\alpha}} \cdot \sqrt[\delta]{a^{\gamma}} = a^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot a^{\frac{\gamma}{\delta}} = a^{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}} = a^{\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}} = \sqrt[\beta\delta]{(a^{\alpha\delta+\beta\gamma})},$$

$$\text{oder } \sqrt[\beta]{a^{\alpha}} = a^{\frac{\alpha}{\beta}} = a^{\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}} = a^{\frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}} = \sqrt[\beta\gamma]{(a^{\alpha\gamma})} = \sqrt[\beta:\gamma]{(a^{\alpha:\gamma})},$$

und dergl. mehr.

2) Man konnte auch reele Wurzeln einführen, d. h. der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ eine Bedeutung für den Fall unterlegen, daß a eine absolute (positive ganze oder gebrochene) Zahl und b irgend eine durch $\pm\frac{\alpha}{\beta}$ vorgestellte reele Zahl ist, indem man darunter die reele Potenz $a^{\frac{1}{b}}$ d. h. $a^{\pm\frac{\beta}{\alpha}}$ zu verstehen festsetzen konnte. Die reele Wurzel war dann eindeutig, hatte jedesmal wirklich eine Bedeutung (bedeutete nämlich immer eine absolute Zahl); und daß die Formeln der Wurzeln (§. 136. und §. 149.) auch dann noch gelten, wenn die Wurzeln, Potenzen und Logarithmen lauter reele sind, konnte augenblicklich nachgewiesen werden.

Es ist aber diese Einführung der reelen Wurzeln, durch welche dieses Kapitel eine schönere Abrundung erhalten haben würde, deshalb unterblieben, weil ihre Auslassung praktisch keine Nachtheile gewährt und gewöhnlich nur Wurzeln betrachtet werden, welche einen positiven ganzen Wurzel-Exponenten haben.

§. 179. Lehrsätze.

Als Erweiterungen mehrer der Lehrsätze des (§. 149.) bemerke man

1) $(a:b\cdot c\cdot d:e:f\cdot g)^m = a^m:b^m\cdot c^m\cdot d^m:e^m:f^m\cdot g^m;$

2) $\sqrt[m]{(a:b:c\cdot d\cdot e:f:g)} = \sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}:\sqrt[m]{c}\cdot\sqrt[m]{d}\cdot\sqrt[m]{e}:\sqrt[m]{f}:\sqrt[m]{g};$

3) $a^{m+n-p-q+r} = a^m\cdot a^n:a^p:a^q\cdot a^r = (a^m\cdot a^n\cdot a^r):a^p\cdot a^q$

4) $(a:b:c\cdot d\cdot e:f\cdot g)?m =$

$= a?m-b?m-c?m+d?m+e?m-f?m+g?m,$

welche hier noch näher betrachtet werden mögen.

Lehrsätze 1 und 2. Ein nach der Regel des (§. 55.) bloß durch Multiplikation und Division zusammengesetzter Ausdruck wird mit einer Zahl m potenzirt oder radizirt, wenn man die einzelnen Glieder potenzirt oder radizirt, übrigens alles Andre unverändert läßt;

Oder auch:

einen solchen nach (§. 55.) zusammengesetzten Ausdruck, dessen einzelne Glieder aber lauter Potenzen sind oder lauter Wurzeln, mit demselben Exponenten versehen, kann man jedesmal in eine Potenz oder Wurzel verwandeln, wenn man diesen gemeinschaftlichen Potenz-, oder Wurzel-Exponenten als solchen heraussetzt, die Dignanden oder Radikanden aber in derselben Verbindung läßt.

Lehrsatz 3. Eine Zahl a wird mit einer algebraischen Summe potenzirt, wenn man die Zahl a mit den einzelnen Gliedern derselben potenzirt, die erhaltenen Potenzen aber nach der Regel des (§. 55.) mit einander verbindet, so zwar, daß die aus den addirten Gliedern erhaltenen Potenzen jetzt multiplizirende, die übrigen aber dividirende Glieder werden.

Lehrsatz 4. Ein nach der Regel des (§. 55.) durch Multiplikation und Division zusammengesetzter Ausdruck wird durch eine Zahl m logarithmirt, wenn man jedes einzelne Glied logarithmirt, diese Logarithmen aber als addirte oder als subtrahirte Glieder neben einander hinschreibt, je nachdem das logarithmirte Glied ein multiplizirendes oder ein dividirendes war.

Die Beweise dieser Sätze ergeben sich durch wiederholte Anwendung der Lehrsätze (§. 149. Nr. Nr. 3. 4. 5. 6. 11. 12. 19. und 20.), den (§. §. 158. 167. und 178.) gemäß, und ähnlich den (§. 102.) geführten Beweisen; wenn nur überall reele Logarithmen und Potenzen, so wie absolute Wurzeln gedacht werden.

Anmerkung. Wenn in der letztern Formel die einzelnen multiplizirenden oder dividirenden Glieder selber wieder Potenzen z. B. p^{α}

oder Wurzeln z. B. $\sqrt[\beta]{q}$ seyn sollte, so bleibt derselbe Satz noch immer wahr, auch wenn man statt der Logarithmen dieser Glieder d. h. statt $(p^{\alpha})?m$ und $(\sqrt[\beta]{p})?m$ nach (§. 149. Nr. Nr. 36. 37.) setzt $\alpha \cdot \overset{m}{log}\, p$ und $\frac{1}{\beta} \cdot \overset{m}{log}\, p$. — Auch kann dieselbe Formel noch so geschrieben werden:

$$\overset{m}{log}\,(a:b:c\cdot d\cdot e:f\cdot g) = \overset{m}{log}\,a - \overset{m}{log}\,b - \overset{m}{log}\,c + \overset{m}{log}\,d + \overset{m}{log}\,e - \overset{m}{log}\,f + \overset{m}{log}\,g$$

auch wohl bloß so

$$log\,(a:b:c\cdot d\cdot e:f\cdot g) = log\,a - log\,b - log\,c + log\,d + log\,e - log\,f + log\,g,$$

indem man sich die Basis, da sie für alle diese Logarithmen dieselbe bleibt und noch überdies beliebig ist, noch hinzudenkt.

Nacherinnerung.

Obgleich wir in dem vorliegenden Kapitel, Begriffe gegeben haben der Potenz a^b, der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ und des Logarithmen $a?b$ für den Fall, daß a durchaus eine absolute (positive ganze oder gebrochene) Zahl ist, und b in den beyden ersten Fällen eine beliebige reele Zahl, im letztern Fall jedoch ebenfalls eine beliebige absolute Zahl; — so war es uns doch zur Zeit noch nicht möglich, Begriffe für dieselben a^b, $\sqrt[b]{a}$ und $a?b$ hinzustellen, für den Fall, daß a und b beyde beliebig reele (positive oder negative) Zahlen sind. Und doch thut solches dem (§. 151.) zu Folge vor allem Noth, wenn es möglich werden soll, das Arbeiten mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, als mit bloßen Rechnungsformen, ganz allgemein, jedoch mit dem Bewußtseyn aufzufassen und gelten zu lassen, daß man nie mit dem vorher als wahr erkannten, also mit nichts für die reelen Zahlen geltend gemachtem, in Widerspruch gerathen werde.

Wir dürfen daher, so lange nicht der Potenz a^b, der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ und dem Logarithmen $a?b$ Bedeutungen gegeben sind, für den Fall, daß a und a beyde beliebig reele Zahlen sind, und so lange nicht bewiesen worden ist, daß für diese letzt erwähnten (noch nicht hingestellten) Bedeutungen alle Sätze des (§. 150.) noch ohne Ausnahme gelten, bey dem Anwenden der Formeln der (§. §. 136. und 149.) und der Regeln des (§. 150.) nicht andre Potenzen, Wurzeln und Logarithmen zulassen, als solche, wie sie bis jetzt eine völlig bestimmte und einzige Bedeutung erhalten haben.

Und erst gegen Ende des zweyten Theiles dieses Lehrbuches werden wir uns in den Stand gesetzt sehen, allgemeine Potenzen a^b, allemeine Wurzeln $\sqrt[b]{a}$ und allgemeine Logarithmen $a?b$, bey denen man sich um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben nicht mehr zu bekümmern braucht, einzuführen und sie den Gesetzen des Kalkuls zu unterwerfen. Zugleich werden wir aber auch die Einschränkungen und die Modifikationen kennen lernen, unter deren Beobachtung allein in den einzelnen Anwendungen dieses allgemeinen Kalkuls, Widersprüche enthaltende (also unrichtige, zuweilen paradox genannte) Resultate vermieden werden können.

Zahlenlehre.

Siebentes Kapitel.

Anwendung der bisher entwickelten allgemeinen Gesetze der Zahlen-Verbindungen, zur Auffindung der Gesetze des (gemeinen) Ziffernrechnens.

Vorerinnerung.

Die bisherigen Lehren sind entwickelt worden ohne irgend etwas aus der gemeinen Rechenkunst dazu nöthig zu haben. Im Gegentheil beruhen die Regeln der gemeinen Rechenkunst gerade erst auf diesen allgemeinen Gesetzen der Zahlen-Verbindungen und müssen aus ihnen nun abgeleitet werden. Es enthält daher dieses Kapitel die Spezies des gemeinen Ziffernrechnens, sowohl die erstern 4 als auch die letztern 3 des Potenzirens, Radizirens und Logarithmirens. Da hier materiell nichts neues entwickelt, sondern nur der wissenschaftliche Zusammenhang des gemeinen Rechnens mit dem ganzen Gebiete der Zahlenlehre nachgewiesen werden soll, so hat man sich so kurz wie nur immer möglich, zu fassen gesucht.

Erste Abtheilung.

Zahlensysteme. Das Addiren, Subtrahiren, Multipliziren, Dividiren, Potenziren, Radiziren und Logarithmiren ganzer numerischer Zahlen.

---

§. 180. Lehrsatz.

Wenn z eine beliebige ganze Zahl vorstellt, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, &c. &c. alle beliebigen der zwischen 1 und z liegenden ganzen Zahlen, oder 1 selbst oder auch die (§. 32.) definirte (Null) 0 bezeichnen, so läßt sich jede bestimmte Zahl N (z. B. die Zahl der Scheffel in einem vor uns liegenden größern oder kleinern Haufen Getraide) allemal durch eine Summe von der Form

$$\alpha + \beta \cdot z + \gamma \cdot z^2 + \delta \cdot z^3 + \varepsilon \cdot z^4 + \text{ &c. &c. } \cdots + \mu \cdot z^m$$

ausdrücken, oder es ist allemal wenn man diese Summe in umgekehrter Ordnung schreibt:

$$N = \mu \cdot z^m + \cdots\cdots + \varepsilon \cdot z^4 + \delta \cdot z^3 + \gamma \cdot z^2 + \beta \cdot z + \alpha.$$

Beweis. Denn jede Zahl ist entweder ein Vielfaches von z oder läßt durch z dividirt, einen Rest, der kleiner ist als z. In beyden Fällen hat sie also die Form

1) $N = az + \alpha$,

nur daß im erstern Fall α Null, im andern Fall α eine der Zahlen vorstellt, welche kleiner als z sind. Aber aus demselben Grunde ist wiederum

2) $a = bz + \beta$, 3) $b = cz + \gamma$, 4) $c = dz + \delta$

u. s. w. f.; also

$$N = az + \alpha = bz^2 + \beta z + \alpha = cz^3 + \gamma z^2 + \beta z + \alpha$$
$$= dz^4 + \delta z^3 + \gamma z^2 + \beta z + \alpha = \text{ &c. &c. &c.}$$

Und da die Zahlen a, b, c, d, &c. die nächst kleinsten Quotienten sind, von $\frac{N}{z}$, $\frac{a}{z}$, $\frac{b}{z}$, $\frac{c}{z}$, &c. &c., so werden sie nothwendig immer kleiner und kleiner, so daß zuletzt eine darunter auch $< z$ werden muß, welche nachgehendes durch μ vorgestellt seyn kann.

§. 181. Zusatz.

Wenn man alle Zahlen der Zahlenreihe auf diese Weise in eine nach demselben Gesetze gebildete Summe, welche eine numerische Zahl genannt werden kann, verwandelt sich denkt, so bilden diese Zeichen das, was man ein Zahlensystem nennt. Dieses Zahlensystem heißt das dyadische, tetradische, dekadische, dodekadische, u.s.f.; je nachdem z die Zahl zwey oder vier, oder zehn oder zwölf, oder ꝛc. vorstellt. Die der Zahl z vorhergehenden Zahlen, werden durch feststehende auf die Folge der Zahlen sich beziehende Zeichen, Ziffern genannt, bezeichnet, und in dieser Beziehung heißt wohl auch die 0 (Null), wie solche (§. 32.) definirt worden ist, eine Ziffer, weil sie hier wie eine Ziffer in Anwendung kommt.

§. 182. Zusatz.

Man pflegt gewöhnlich dieselbe Summe

$$\mu z^m + \cdots + \varepsilon z^4 + \delta z^3 + \gamma z^2 + \beta z + \alpha$$

bloß so zu schreiben

$$\mu \cdots\cdots \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha;$$

und nennt dann die Ziffern α, β, γ, δ, ε, $\cdots\cdots$ beziehlich Ziffern der 0ten, 1ten, 2ten, 3ten, 4ten, ꝛc. Ordnung, um anzudeuten, statt welcher Produkte sie stehen, d. h. mit welchen Potenzen von z sie multiplizirt sind, während alle diese Produkte (Ziffern der verschiedenen Ordnungen) addirt gedacht werden müssen.

§. 183. Zusatz.

Nach dieser Bezeichnungsweise stehet also

10	statt	$1 \cdot z + 0$	d. h.	statt	z,	
100	statt	$1 \cdot z^2 + 0 \cdot z + 0$	d. h.	statt	z^2	oder 10^2,
1000	statt	$1 \cdot z^3 + 0z^2 + 0z + 0$	d. h.	statt	z^3	oder 10^3.

Eben so ist offenbar

$100000 = z^5 = 10^5$, $1000000 = z^6 = 10^6$,

u. s. w. f. und diese Potenzen von z nennt man daher Einheiten der höhern Ordnungen.

§. 184. Zusatz.

Es ist nun leicht zu sehen, wie nach (§. 38.) zwey solche numerische Zahlen zu oder von einander addirt und subtrahirt werden, so nämlich, daß das Resultat jedesmal selber wieder eine numerische Zahl wird, weil man die Ziffern gleichnamiger Ordnungen nach (§. 81. Nr. Nr. 1. und 2.) zu einander addiren und von einander subtrahiren kann. Es ist aber dazu nöthig, daß man je zwey Ziffern α und β addire, d. h. die Summe $\alpha+\beta$ durch Zusammenzählen der Einheiten entweder selbst wieder in eine Ziffer verwandle, wenn $\alpha+\beta<z$, oder in eine Summe von der Form $1 \cdot z+\gamma$ (geschrieben 1γ) wenn $\alpha+\beta>z$ (in so ferne $\alpha+\beta$ jedesmal $<2z$ seyn muß). Geschieht dieses Zusammenzählen je zweyer Ziffern einmal, so kann man aus der, von den Resultaten gebildeten Tabelle (das Eins und Eins genannt) oder aus dem Gedächtniß, sowohl das bey dem Addiren, als auch das bey dem Subtrahiren nöthige jedesmal unmittelbar entnehmen.

Eben so findet sich bald die bequemste praktische Form dieser Arbeiten.

§. 185. Zusatz.

Aber eben so einfach findet sich das Multipliziren zweyer numerischen Zahlen aus (§. 107.), in so ferne das Resultat eben falls in eine numerische Zahl umgeformt werden soll.

Man kann aber auch, wenn die numerische Zahl N mit der andern, z. B. mit $\delta z^3+\gamma z^2+\beta z+\alpha$, multiplizirt werden soll, die Formel (§. 102. Nr. 1.) anwenden, so daß man die Zahl N zuerst mit α, dann mit βz (d. h. mit β, und hernach was herauskommt mit z oder 10), ferner mit γz^2 (d. h. mit γ, und was herauskommt, noch mit z^2 oder 100), zuletzt mit δz^3 (d. h. mit δ und mit z^3 oder 1000) multiplizirt und zuletzt alle Resultate addirt. Auf diese Weise bildet sich die bequemste praktische

Form

Form dieser Arbeit, die man jedoch auch in umgekehrter Ordnung vornehmen kann, so daß der Multiplikand N zuerst mit δz^3, hernach mit γz^2, dann mit βz und zuletzt mit α multiplizirt wird.

Es ist aber dazu nöthig, daß man die Produkte je zweyer Ziffern α und β, welche immer kleiner sind als $z \cdot z$ d. h. kleiner als z^2 oder 100, welche also allemal die Form $\gamma \cdot z + \delta$ annehmen können, in diese Form verwandle. Dies kann jedoch nur aus der Definition des Produkts $\alpha\beta$ geschehen, nach welcher man α so oft addirt, als β Einheiten hat. — Hat man dies indessen ein fur allemal für je zwey Ziffern gethan, so kann man aus der durch die Resultate gebildeten Tabelle (das Ein mal Eins genannt) oder aus dem Gedächtniß, die einzelnen Formen jedesmal unmittelbar entnehmen.

§. 186. Zusatz.

Das Dividiren zweyer numerischen Zahlen durch einander, geschieht durch wiederholte Anwendung der Formel der (§. §. 83. 84.), nämlich

$$\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B},$$

wie solche bereits (§. 108.) angewandt wurde, indem man hier jedesmal zum ersten Summanden x, die höchste Ziffer der höchsten Ordnung nimmt (was nnr durch Versuche gefunden werden kann), damit der zweyte Summand nur noch Ziffern der niedrigern Ordnungen liefern könne. Auf diese Weise bilden, wenn man die gehörige Vorsicht anwendet, die nach und nach sich findenden Summanden, zugleich eine numerische Zahl (in so ferne nämlich keine Ordnung fehlt, und die etwa fehlende durch 0 ersetzt wird). — Auf diesem Wege bekommt man auch zugleich die bequemste praktische Form der Division, so wie auch den Bruch, welcher noch hinzu addirt werden muß, im Falle die Division zuletzt einen Rest läßt, der nicht Null ist.

§. 187. Zusatz.

Das Potenziren zweyer numerischen Zahlen ließe sich höchstens nach der Formel (§. 149. Nr. 5.) vereinfachen, kommt aber zu-

letzt immer wieder auf den Begriff der Potenz zurück, so daß man eben den Dignanden so oft nimmt, als der Exponent Einheiten hat, und dann alle diese gleichen Zahlen nach (§. 185.) mit einander multiplizirt.

§. 188. Zusatz.

Das Radiziren zweyer numerischen Zahlen durch einander wird so mühsam, daß man sich in den Elementen auf das Radiziren einer beliebig gegebenen Zahl durch die einfachsten Zahlen 2, 3, 4, ... beschränkt, und dieses Geschäft das Quadrat-, Kubik-, Biquadrat- ꝛc. Wurzel-Ausziehen nennt.

1) Um eine Idee dieses Wurzel-Ausziehens zu geben, sey 7943 durch 2 zu radiziren. Da $10^2 = 100$ und $100^2 = 10000$ ist, so liegt die gesuchte Wurzel zwischen 10 und 100, ist also zweyziffrig und hat die Form $\alpha \cdot 10 + \beta$, wo α und β Ziffern sind. Soll aber

$$\sqrt[2]{(7943)} = \alpha \cdot 10 + \beta$$ seyn, so muß

$$7943 = (\alpha \cdot 10 + \beta)^2 = \alpha^2 \cdot 100 + 2\alpha\beta \cdot 10 + \beta^2$$

werden. Weil jedoch $7943 = 79 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 3$ ist, so wird α^2 nahehin 79, also $\alpha = 8$ seyn müssen. Dann ist $\alpha^2 = 64$, und $\alpha^2 \cdot 100$ auf beyden Seiten der obigen Gleichung subtrahirt, läßt $1543 = 2\alpha\beta \cdot 10 + \beta^2$;

d. h. $154 \cdot 10 + 3 = 2 \cdot 8 \cdot \beta \cdot 10 + \beta^2$;

und es muß also $2 \cdot 8 \cdot \beta$ d. h. 16β nahehin 154 werden, also β nahehin $\frac{154}{16}$ d. h. nahehin 9. Dann ist aber

$2\alpha\beta \cdot 10 = 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 16 \cdot 9 \cdot 10 = 1440$ und $\beta^2 = 81$;

demnach $2\alpha\beta \cdot 10 + \beta^2 = 1521$, so daß die gegebene Zahl 7943 um 22 zu groß ist, wenn 89 die Quadratwurzel seyn soll. Es ist also 89 die nächstkleinste und 90 die nächstgrößte Quadratwurzel von 7943.

2) Wäre die Quadratwurzel aus einer größern Zahl z. B. aus 197581 gesucht, so würde man zwar wissen, daß selbige zwischen 100 und 1000 liegt, also 3 ziffrig ist; dagegen sie doch

in der Form $\alpha \cdot 10 + \beta$ hinstellen können, nur daß α selbst eine zweyziffrige Zahl wäre. Dann wäre α^2 nahehin 1975, also, um α zu finden, aus 1975 die nächstkleinste Quadrat-Wurzel zu ziehen. Ist solches genau nach dem vorhergehenden Beyspiel (Nr. 1.) geschehen und $\alpha = 44$ gefunden worden, so findet man dann sogleich, wie im vorhergehenden Beyspiele schließend, die andere Ziffer β dazu.

So ergibt sich leicht das praktische Verfahren, um aus beliebig vielziffrigen Zahlen die nächstkleinste Quadrat-Wurzel zu finden, so wie auch die praktische Form dieses Verfahrens.

3) Sollte aus 197581 die Kubikwurzel gezogen werden, so wüßte man wieder, weil $10^3 = 1000$ und $100^3 = 1000000$ ist, daß die Wurzel zweyziffrig und also von der Form $\alpha \cdot 10 + \beta$ ist. Soll aber

$$\sqrt[3]{197581} = \alpha \cdot 10 + \beta \text{ werden, so muß}$$
$$197581 = (\alpha \cdot 10 + \beta)^3 \text{ seyn.}$$

Nun ist aber nach (§. 149. Lehrs. 1.):

$$(\alpha \cdot 10 + \beta)^3 = \alpha^3 \cdot 1000 + 3\alpha^2\beta \cdot 100 + 3\alpha\beta^2 \cdot 10 + \beta^3,$$
$$\text{und } 197581 = 197 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 18 \cdot 10 + 1,$$

und es muß also α^3 nahehin 197, demnach $\alpha = 5$ seyn, weil $6^3 = 216$ schon zu viel ist. Subtrahirt man nun $\alpha^3 \cdot 1000$ d. h. 125000 auf beyden Seiten der obigen Gleichung, so erhält man

$$72581 = 3\alpha^2\beta \cdot 100 + 3\alpha\beta^2 \cdot 10 + \beta^3;$$
$$\text{aber } 72581 = 725 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 1,$$

so daß $3\alpha^2 \cdot \beta$ nahehin 725, d. h. β nahehin $\frac{725}{3\alpha^2}$ oder $\frac{725}{75}$ oder 9 seyn wird. Dann ist aber

$$3\alpha^2\beta \cdot 100 = 67500$$
$$3\alpha\beta^2 \cdot 10 = 12150$$
$$\beta^3 = 729$$
$$3\alpha^2\beta \cdot 100 + 3\alpha\beta^2 \cdot 10 + \beta^3 = 80379;$$

und so sieht man, daß 9 statt β anzunehmen nicht erlaubt ist, daß man den Werth von β überschätzt hat, und daß man es

demnach mit $\beta = 8$ versuchen müsse. — Für $\beta = 8$ findet sich aber $3\alpha^2\beta \cdot 100 + 3\alpha\beta^2 \cdot 10 + \beta^3 = 70112$; und es ist also 58 die nächstkleinste, 59 dagegen die nächstgrößte Kubikwurzel aus 197581.

4) Sollte aus einer noch viel größern Zahl die Kubikwurzel gezogen werden, z. B. aus 98729086, so würde man die Wurzel wieder $= \alpha \cdot 10 + \beta$ setzen, aber α als eine zweyziffrige Zahl ansehen. Dann wäre α^3 nahehin 98729, also α zu finden, wenn man aus 98729 die nächstkleinste Kubikwurzel zieht, was nach (Nr. 3.) geschehen kann. — Ist aber α gefunden, so findet sich β, genau wie in (Nr. 3.) verfahrend, sogleich dazu.

Auf diese Weise findet sich die nächstkleinste Kubikwurzel einer jeden noch so großen Zahl, immer das Verfahren (Nr. 3.) wiederholend. Und dann gibt sich auch bald die bequemste praktische Form dieses Geschäfts.

5) Auf dieselbe Weise läßt sich auch, die Formeln des (§. 149. Lehrs. 1.) zu Hülfe nehmend, jede höhere Wurzel ausziehen, nur daß die Mühseligkeiten der Arbeit mit jedem größern Wurzel-Exponenten unverhältnißmäßig größer werden. — Deshalb ist es gut, daß wir später noch ganz andere Mittel angeben können, welche diese lästigen Arbeiten überflüßig machen.

§. 189. Zusatz.

Aus einem Bruche wird die Wurzel gezogen, wenn man sie aus Zähler und Nenner zieht, nach (§. 149. Nr. 12.). In der Praxis wird man aber vorher den Bruch (dadurch daß man seinen Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl zugleich multiplizirt) so umformen, daß aus dem Nenner sich die Wurzel genau ziehen läßt.

Z. B. Statt $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ setze man $\sqrt[2]{\frac{2}{4}}$ d. h. $\frac{\sqrt[2]{2}}{2}$; d. h. $\frac{1}{2}\sqrt[2]{2}$. —

Eben so ist $\sqrt[2]{\frac{5}{12}} = \sqrt[2]{\frac{15}{36}} = \frac{\sqrt[2]{15}}{6} = \frac{1}{6}\sqrt[2]{15}$.

Ferner ist $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$; u. s. f.

§. 190. Zusatz.

Will man die Wurzel aus einer Zahl a näherungsweise und bis zu jeder beliebigen Näherung finden, so wendet man das Verfahren der (§. §. **162. 163.**) an, nimmt aber in der Praxis statt n die Zahlen **10, 100, 1000, 10000**, u. s. w., weil dann die dadurch entstehenden Brüche die bequemsten sind.

§. 191. Zusatz.

Soll der nächstkleinste Logarithme einer numerischen Zahl z. B. **913746** für eine numerische Zahl z. B. 7 als Basis, gefunden werden, so berechne man die Potenzen

$$7^2, 7^3, 7^4, 7^5, 7^6, 7^7, 7^8, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

und wenn man nun findet, daß die gegebene Zahl z. B. zwischen 7^6 und 7^7 liegt, so ist **6** der gesuchte nächstkleinste Logarithme, in ganzen Zahlen.

§. 192. Zusatz.

Wird aber derselbe Logarithme näherungsweise und zwar bis zu jedweden Grad der Annäherung gesucht, so darf man nur das Verfahren der (§. §. **174. 175.**) anwenden.

Dieses Verfahren kürzt sich indessen noch ab, wenn man den Satz (§. **149.** Nr. **5.**) in Anwendung bringt. Ist z. B. $\overset{10}{log}$ **213746** oder **213746? 10** zu finden, so zeigt sich $\mathbf{10^5 = 100000}$, $\mathbf{10^6 = 1000000}$; also **5** der nächstkleinste Logarithme in ganzen Zahlen.

Nun setze man den gesuchten Näherungswerth

$$= 5 + \frac{\alpha}{10} + \frac{\beta}{100} + \frac{\gamma}{1000} + \cdots$$

wo α, β, γ, gesuchte Ziffern sind; so muß

$$10^{5+\frac{\alpha}{10}+\frac{\beta}{100}+\frac{\gamma}{1000}+\cdots} = 213746 \text{ werden,}$$

d. h. $10^5 \cdot 10^{\frac{\alpha}{10}} \cdot 10^{\frac{\beta}{100}} \cdot 10^{\frac{\gamma}{1000}\cdots} = 213746$

d. h. $10^{\frac{\alpha}{10}} \cdot 10^{\frac{\beta}{100}} \cdot 10^{\frac{\gamma}{1000}\cdots} = \frac{213746}{100000} = a.$

Weil aber $10^{\frac{\alpha}{10}} = (\sqrt[10]{10})^{\alpha}$, so berechne man $\sqrt[10]{10}$ näherungsweise, und potenzire solche nach und nach mit 2, 3, 4, 5, ꝛc., bis zwey Potenzen z. B. $(\sqrt[10]{10})^3$ und $(\sqrt[10]{10})^4$ entstehen, zwischen denen a d.h. $\frac{213746}{100000}$ liegt. Dann ist offenbar $\alpha = 3$, und die obige Gleichung wird nun, wenn man auf beyden Seiten durch $10^{\frac{\alpha}{10}} = (\sqrt[10]{10})^3$ wegdividirt:

$$10^{\frac{\beta}{100}} \cdot 10^{\frac{\gamma}{1000}} \ldots = \frac{a}{(\sqrt[10]{10})^3} = \frac{213746}{100000 \cdot (\sqrt[10]{10})^3} = b.$$

Dann berechne man $\sqrt[100]{10} = \sqrt[10]{(\sqrt[10]{10})}$, näherungsweise, und bestimme hievon die 2te, 3te, 4te, 5te, ꝛc. Potenz, bis man zwey dieser Potenzen hat, z. B. die 2te und 3te, zwischen denen die vorhin berechnete Zahl b liegt; dann ist offenbor $\beta = 2$, und die obige Gleichung wenn man auf beyden Seiten durch

$$10^{\frac{\beta}{100}} = (\sqrt[100]{10})^2 \text{ dividirt, wird nun}$$

$$10^{\frac{\gamma}{1000}} \ldots = \frac{b}{(\sqrt[100]{10})^2} = c.$$

Auf diese Weise findet man γ, und die übrigen Ziffern, wenn auch mit unbeschreiblicher Mühe, jedoch ganz ohne Schwierigkeit; so daß man den Logarithmen näherungsweise gefunden hat.

§. 193. Zusatz.

Zu gleicher Zeit sieht man, wie dasselbe Verfahren angewandt werden kann, wenn die Basis irgend eine andre ganze oder gebrochene Zahl ist, nur daß die Auffindung der 10ten, 100ten, 1000ten Wurzel aus der Basis, wenn letztere eine gebrochene Zahl ist, noch mehr Mühe macht.

Anmerkung. Auch für das Logarithmiren ist es gut, daß wir später noch ganz andre Mittel angeben können, welche den Logarithmen mit unverhältnißmäßig weniger Mühe zu liefern im Stande sind.

Zweyte Abtheilung.

Von den systematischen Brüchen.

§. 194. Erklärung.

Jeder Bruch, dessen Nenner **10** oder eine der Potenzen von **10** ist, z. B. **100**, **1000**, **10000**, u. s. w. heißt ein systematischer Bruch. — Solchen schreibt man kürzer dadurch, daß man bloß den Zähler schreibt, und an selbigem, von der Rechten zur Linken gehend, so viele Stellen durch ein Komma absondert, als der zugehörige Nenner Nullen hat.

So schreibt man z. B.

3,7 statt $\frac{37}{10}$ oder $3+\frac{7}{10}$

0,37 statt $\frac{37}{100}$

0,0037 statt $\frac{37}{10000}$

14,00607 statt $\frac{1400607}{100000}$ d. h. statt $14\frac{607}{100000}$.

§. 195. Zusatz.

In einem systematischen Bruche hat man also den Zähler, wenn man das Komma gar nicht berücksichtigt, den Nenner dagegen, wenn man neben **1** so viel Nullen setzt, als rechts vom Komma noch Stellen sind.

Diese rechts vom Komma stehenden Stellen nennt man die gebrochenen Stellen, die links vom Komma stehenden, die ganzen Stellen.

§. 196. Zusätze.

1) Weil z. B.

$$\frac{1472965}{100000} = \frac{1\cdot10^6+4\cdot10^5+7\cdot10^4+2\cdot10^3+9\cdot10^2+6\cdot10+5}{10^5}$$

$$= 1\cdot10+4+\frac{7}{10}+\frac{2}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{6}{10000}+\frac{5}{100000}$$

ist, so kann man den systematischen Bruch **14, 72965** auch als die hier stehende Summe sich denken.

2) Am weitesten zur Rechten eines systematischen Bruches kann man Nullen anhängen und weglassen, so viel man deren will, und der systematische Bruch bleibt am Werthe unverändert.

So ist z. B.

$$3{,}7 = \frac{37}{10} = \frac{37000}{10000} = 3{,}7000;$$

$$0{,}07600 = \frac{7600}{100000} = \frac{76}{1000} = 0{,}076;$$

denn es bleibt ein Bruch unverändert, wenn man Zähler und Nenner zugleich mit 1000, 100, ꝛc. ꝛc. multiplizirt oder dividirt.

3) Systematische Brüche werden daher unter einerley Benennung gebracht, d. h. in andre gleiche systematische Brüche verwandelt, welche alle einen und denselben Nenner haben, wenn man rechts Nullen anhängt, bis alle Brüche eine gleiche Anzahl gebrochener Stellen haben.

So z. B. schreibt man

	0,03		0,03000
statt	1,6078		1,60780
der	14,00068	die gleichen Brüche	14,00068
Brüche	15,4		15,40000
	0,7 4		0,70400

§. 197. Zusatz.

Systematische Brüche werden zu einander addirt, von einander subtrahirt, mit einander multiplizirt und durch einander dividirt, wie gewöhnliche Brüche, also nach den Formeln

$$1)\ \frac{a}{10^c} \pm \frac{b}{10^c} = \frac{a \pm b}{10^c}; \qquad 2)\ \frac{a}{10^b} \cdot \frac{c}{10^d} = \frac{a \cdot c}{10^{b+d}};$$

$$3)\ \frac{a}{10^b} : \frac{c}{10^d} = \frac{a : c}{10^{b:d}},$$

nur daß man immer den Nenner nicht schreibt, sondern bloß dazu denkt, und dabey dafür sorgt, daß das Resultat sogleich wieder ein systematischer Bruch wird.

1) Bey dem Addiren und Subtrahiren hat man also nur die Brüche nach (§. 196. Nr. 3.) unter einerley Benennung zu bringen, die Zähler zu addiren, und den Nenner zu lassen (d. h. das Komma in die ebensovielte Stelle von der Rechten zur Linken zu setzen).

2) Bey dem Multipliziren zweyer systematischen Brüche, multiplizirt man also die ganzen Zahlen, welche die Zähler bilden, und hat zum Nenner so viele (nämlich b+d) Nullen, als beyde Faktoren deren im Nenner zusammengenommen haben. Also bekommt der Zähler ein Komma um so viele Stellen von der Rechten zur Linken stehend, als beyde Faktoren zusammen, gebrochene Stellen haben.

3) Bey dem Dividiren zweyer systematischen Brüche, dividirt man, obiger Formel (3) gemäß, die ganzen Zahlen, welche die Zähler bilden durch einander, dies gibt den neuen Zähler; und der Nenner hat b—d Nullen, wenn der Nenner des Dividenden deren b, und der Nenner des Divisors d Nullen hatte. Also bekommt der Quotient im Zähler so viele gebrochene Stellen, als deren der Dividend hat, weniger der Anzahl derer, welche der Divisor hat.

Es ist aber dabey zu bemerken:

A) Hat der Dividend nicht mehr gebrochene Stellen als der Divisor, so gebe man ihm durch Anhängen von Nullen nach (§. 196. Nr. 2.) so viele als er haben soll.

B) Geht die Division der Zähler a und c nicht ohne Rest auf, sondern bleibt noch ein Rest n, so findet sich $a:c = m + \frac{n}{c}$, wo $\frac{n}{c} < 1$ ist; und dann ist der wahre Quotient der Brüche $\frac{a}{10^b}$ und $\frac{c}{10^d}$ offenbar $\frac{m}{10^{b-d}} + \frac{\frac{n}{c}}{10^{b-d}}$. — Nimmt man also den systematischen Bruch $\frac{m}{10^{b-d}}$ für den wahren Quotienten, so

hat man um $\frac{\frac{n}{c}}{10^{b-d}}$ zu wenig; also fehlt man um weniger als $\frac{1}{10^{b-d}}$. — Sorgt man indessen nach (1. A.) dafür, daß die Anzahl b der gebrochenen Stellen des Dividenden, also auch b—d und mithin 10^{b-d} groß genug wird, so kann man die Näherung treiben, so weit man nur immer will, und sich also in jedem Falle der Anwendung, mit dem bloßen systematischen Bruche $\frac{m}{10^{b-d}}$ begnügen.

§. 198. Zusatz.

Soll aus einem systematischen Bruche $\frac{a}{10^b}$ die Quadrat-, die Kubik-, oder irgend eine höhere Wurzel z. B. die nte Wurzel gezogen werden, so darf man nur Zähler und Nenner mit 10^d multipliziren (d. h. am weitesten zur Rechten d Nullen anhängen) die Zahl d aber so wählen, daß b+d ein Vielfaches von n, z. B. $b+d = mn$ wird.

Denn dann hat man (§. 149. Nr. 12.)

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{10^b}\right)} = \sqrt[n]{\left(\frac{a \cdot 10^d}{10^{mn}}\right)} = \frac{\sqrt[n]{(a \cdot 10^d)}}{10^m},$$

weil $\sqrt[n]{(10^{mn})} = 10^m$ ist, nach (§. 149. Nr. 8.).

Man zieht dann aus dem neuen Zähler $a \cdot 10^d$ die nächstkleinste nte Wurzel, und gibt dieser Zahl, m gebrochene Stellen durch das Setzen des Komma, so hat man einen Näherungswerth, welcher von dem wahren um weniger als $\frac{1}{10^m}$ verschieden ist, während d, folglich auch m, so groß, also $\frac{1}{10^m}$ so klein werden kann, als man nur immer will, und als man in den einzelnen Fällen der Anwendung es bedarf.

§. 199. Zusatz.

Das Logarithmiren eines systematischen Bruches a durch einen andern b, d. h. das Auffinden das Logarithmen von a für die Basis b, bleibt genau so, wie solches (§. 192.) bereits beschrieben steht.

§. 200. Zusatz.

Da jede ganze Zahl α, entweder als $\frac{\alpha}{10^0}$ (in so ferne $10^0 = 1$ ist) d. h. als ein systematischer Bruch von gar keiner gebrochenen Stelle, oder doch als $\frac{\alpha \cdot 10^h}{10^h}$, d. h. als ein systematischer Bruch von beliebig viel (nämlich h) gebrochenen Stellen, die aber lauter Nullen sind, angesehen werden kann, so folgt, daß alles bisher von dem Operiren mit systematischen Brüchen gesagte, auch noch anwendbar bleibt, für den Fall, daß dazwischen ganze Zahlen vorkommen.

§. 201. Zusatz.

Dies kann namentlich auf den Fall angewandt werden, in welchem ein gewöhnlicher Bruch z. B. $\frac{\alpha}{\beta}$ in einen systematischen Bruch verwandelt werden soll. Da nämlich jeder Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ nichts anders ist, als eine angezeigte Division, so kann man mit β in α dividiren, beyde als systematische Brüche gedacht (nach §. 197.), und man erhält sogleich den verlangten systematischen Bruch, welcher $= \frac{\alpha}{\beta}$ ist.

Man kann aber auch den Zähler x suchen, so daß

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{x}{10^m} \text{ wird,}$$

und da ergibt sich augenblicklich, wenn man mit 10^m auf beyden Seiten multiplizirt,

$$\frac{\alpha \cdot 10^m}{\beta} = x;$$

d. h. man hängt an den Zähler α, m Nullen an, dividirt durch den Nenner β, und gibt dem Quotienten x, m gebrochene Stellen. Und bleibt bey der Division mit β in $\alpha \cdot 10^m$ ein Rest r, so daß x oder $\frac{\alpha \cdot 10^m}{\beta} = q + \frac{r}{\beta}$ wird, so ist, wenn man statt $\frac{x}{10^m}$ d. h. statt $\frac{q + \frac{r}{\beta}}{10^m}$ nun den systematischen Bruch $\frac{q}{10^m}$ nimmt, dieses gefundene Resultat um $\frac{\frac{r}{\beta}}{10^m}$ zu klein, also um weniger zu klein, als $\frac{1}{10^m}$. Und da die Zahl m der angehängten Nullen, beliebig genommen werden kann, so kann man doch jedesmal einen systematischen Näherungsbruch finden, welcher von dem gegebenen $\frac{\alpha}{\beta}$ so wenig abweicht, als man nur immer will, und als der jedesmalige Fall der Anwendung es erfordert.

Dritte Abtheilung.

Von den systematischen Logarithmen.

---

§. 202. Erklärung.

Die reelen Logarithmen aller Zahlen für eine und dieselbe Basis 10 berechnet, bilden ein Logarithmensystem.

§. 203. Zusatz.

Weil in diesem System

$log\ 1 = 0$, $log\ 10 = 1$, $log\ 100 = 2$, $log\ 1000 = 3$, u. s. w. überhaupt $log\ 10^n = n$ ist, so folgt, daß der systematische Logarithme einer jeden n ziffrigen Zahl, zwischen $n-1$ und

n liegt; mithin als ein systematischen Bruch gedacht werden kann, der links vom Komma die ganze Zahl n—1 zu stehen hat, rechts vom Komma aber die gebrochenen Stellen, um welche er selbst größer ist als n—1.

Diese ganze Zahl n—1 heißt dann die Kennziffer oder Charakteristik; die gebrochenen Stellen bilden die Mantissa des systematischen Logarithmen.

§. 204. Zusatz.

Umgekehrt, ist die Kennziffer eines systematischen Logarithmen die Zahl α, so liegt der zugehörige Logarithmand zwischen 10^{α} und $10^{\alpha+1}$, ist also eine ganze Zahl von $\alpha+1$ neben einander geschriebenen Ziffern; und wenn er keine ganze Zahl ist, so liegt er doch nothwendig zwischen zwey $(\alpha+1)$ ziffrigen Zahlen, so daß er als ein systematischer Bruch gedacht werden kann, der $\alpha+1$ ganze Stellen hat.

§. 205. Zusatz.

Da jeder systematische Bruch z. B. 7196,07458 als ein gewöhnlicher Bruch $\frac{719607458}{100000}$ gedacht wird, so wird sein systematischer Logarithme gefunden, wenn man von dem systematischen Logarithmen des Zählers 719607458, den des Nenners 100000, welcher allemal eine ganze Zahl und dasmal 5 ist, subtrahirt. Da nun dieses Subtrahiren auf die gebrochenen Stellen des Logarithmen nicht einfließt, sondern nur auf die ganzen Stellen, so folgt, daß die systematischen Logarithmen der ganzen Zahl 719607458, und jedes aus ihr durch ein beliebiges Setzen des Komma gebildeten systematischen Bruches z. B. 7196,07458 in ihrer Mantissa d. h. in ihren gebrochenen Stellen nicht von einander verschieden sind, sondern nur in ihrer Charakteristik oder Kennziffer von einander abweichen.

§. 206. Zusatz.

Weil die Logarithmen aller ächten Brüche negativ sind (§. 175.), so pflegt man solche, wenn sie systematische sind, um 10,

20, wohl auch um 100 zu groß zu nehmen, damit sie positiv werden und das obige Gesetz auch noch für diese statt finden könne; behält aber dabey im Gedächtniß, oder notirt sich hinter dem systematischen Logarithmen mittelst eines (—) Zeichens, um wieviel der Logarithme zu groß genommen ist, um solches gelegentlich wieder in Anrechnung bringen zu können.

§. 207. Zusatz.

Wird also unter diesen Voraussetzungen zu einem gegebenen systematischen Logarithmen c, der Logarithmand a wieder gesucht, so darf man nur die aus beliebig viel Ziffern bestehende ganze Zahl d suchen, deren Logarithme in seinen gebrochenen Stellen (in der Mantissa) mit dem gegebenen c übereinstimmt; in dieser ganzen Zahl d, von der Linken zur Rechten gehend, n+1 ganze Stellen durch ein Komma absondern, wenn n die Kennziffer des gegebenen Logarithmen ist, und man hat den gesuchten Logarithmanden a.

Ist aber der gegebene Logarithme c um m ganze Einheiten zu groß gewesen, so muß dieses letzt gefundene Resultat a noch durch 10^m dividirt werden, und $\frac{a}{10^m}$ ist nun der gesuchte Logarithmand.

Denn es ist

$$log\left(\frac{a}{10^m}\right) = log\ a - log\ 10^m = log\ a - m = c - m,$$

also dem gegebenen Logarithmen, weniger den m Einheiten, um welche er zu groß gegeben (genommen) war, gleich.

Vierte Abtheilung.

Dekadisches Zahlensystem. Decimalbrüche. Brigg'sche oder gemeine (vulgarische) Logarithmen.

§. 208. Erklärung.

Bisher ist von keinem bestimmten Zahlensystem die Rede gewesen, und alles in den vorhergehenden Blättern gesagte bezieht sich auf jedes beliebige System, weil **10** nicht Zehn, sondern $1 \cdot z + 0$ d. h. z bedeutete, so wie **100** nicht die Bedeutung zehn mal zehn, sondern die Bedeutuug $z \cdot z$ oder z^2 hatte, währeud z jede beliebige ganze Zahl, also z. B. auch zwölf bedeuten konnte.

Gewöhnlich bedienen wir uns aber des dekadischen Zahlen-Systems, in welchem die Zahl z zehn ist. Die Zeichen **10, 100, 1000, 10000, 1000000** 2c. 2c. bedeuten dann die verschiedenen ganzen Potenzen von zehn, die wir noch mit den besondern Namen (in so ferne die Sprache nach dem dekadischen System gebildet ist)

zehn, hundert, tausend, zehntausend,
hunderttausend, Million, 2c. 2c. belegen.

In diesem Falle braucht man nur diejenigen Zahlen, welche der zehn vorangehen durch Ziffern zu bezeichnen, so daß man jetzt gerade die Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

gebraucht, nicht mehr und nicht weniger.

Der zu diesem dekadischen Zahlensystem gehörige systematische Bruch heißt dann Decimalbruch; seine gebrochene Stellen, Decimalstellen, auch wohl Decimalen.

Die zu demselben dekadischen Zahlensysteme gehörigen systematischen Logarithmen, heißen in's Besondere Brigg'sche Logarithmen, auch gemeine (vulgarische). — Den erstern Namen haben sie von ihrem ersten Berechner Brigg, den andern von ihrem, in den gemeinen Rechnungen gemeinen Gebrauche.

Diese Brigg'schen Logarithmen finden sich von mehren Seiten berechnet und in Tabellen (Logarithmentafeln genannt) zusammengestellt, deren Einrichtung und Gebrauch auf den hier entwickelten Principien beruht und in den Einleitungen zu diesen Tabellen beschrieben seyn muß.

§. 209. Zusatz.

Man bedient sich aber solcher Logarithmentafeln gewöhnlich nur in folgenden 4 Fällen, und ihre Anwendung überhaupt gründet sich nur auf den Umstand, daß es einerlei ist, ob man eine Zahl habe oder ihren Logarithmen, in so ferne die Tabelle, zu dem Logarithmen augenblicklich die Zahl (den Logarithmanden) liefert. —

1) Sollen nämlich zwey gegebene numerische Zahlen a und b mit einander multiplizirt werden, so suche man das Produkt ab nicht direkt, sondern seinen Logarithmen. Nun ist aber $log\ ab = log\ a + log\ b$; d. h. dieser Logarithme findet sich, wenn man die Logarithmen von a und von b, addirt, welches immer geringe Mühe erfordert.

2) Soll a durch b numerisch dividirt werden, so suche man den Quotienten $\frac{a}{b}$ nicht direkt, sondern lieber seinen Logarithmen. Es ist aber $log\left(\frac{a}{b}\right) = log\ a - log\ b$, so daß dieser Logarithme gefunden wird, wenn man von dem Logarithmen von a, den von b subtrahirt.

3) Soll a mit b potenzirt werden, so suche man die Potenz a^b nicht direkt, sondern ihren Logarithmen. Es ist aber $log\ (a^b) = b \cdot log\ a$; d. h. man findet diesen Logarithmen, wenn man den Logarithmen des Dignanden a mit dem Exponenten b multiplizirt.

4) Soll endlich a durch b radizirt, d. h. $\sqrt[b]{a}$ numerisch berechnet werden, so thue man dies nicht direkt, sondern suche lieber den Logarithmen dieser Wurzel. Es ist aber $log\ (\sqrt[b]{a}) = \frac{log\ a}{b}$;

d. h.

d. h. man findet diesen Logarithmen, wenn man den Logarithmen des Radikanden a durch den Wurzel-Exponenten b dividirt.

Und in allen Fällen, wo der Logarithme einer Zahl gefunden ist, suche man in der Tabelle die Zahl (den Logarithmanden) selbst dazu.

§. 210. Zusatz.

Seltener bedient man sich einer solchen Tafel zum Logarithmiren selbst. Soll aber a durch b numerisch logarithmirt, d. h. soll der Logarithme einer beliebigen Zahl a für eine beliebig gegebene Basis b gefunden werden, so hat man nach (§. 149. Nr. 41.)

$$a?b = \frac{a?10}{b?10}, \text{ d. h. } \overset{b}{log}\ a = \frac{log\ brigg\ a}{log\ brigg\ b}.$$

Und hätte man Tafeln für irgend ein anderes System berechnet, d. h. für irgend eine Basis c, so wäre doch noch immer $\overset{b}{log}\ a = \frac{log\ a}{log\ b}$, die letztern beyden Logarithmen aus den Tafeln genommen.

Zahlenlehre.

Achtes Kapitel.

Praktische Regeln der Ziffern= und der Buchstaben= Rechenkunst.

Vorerinnerung.

In so ferne es nicht allein nöthig ist, die Lehrsätze der Zahlenlehre zu wissen, sondern sie auch anwenden zu können, mögen hier die gewöhnlichsten Anwendungen der bisher vorgetragenen Theorie der Zahlen Platz finden. Weil aber hier keine neuen Lehrsätze vorgetragen, sondern die schon vorgetragenen nur in Anwendung gebracht werden, dieses ganze Kapitel also eigentlich gar nicht zur Theorie gehört, sondern hier nur der Praxis wegen seinen Platz findet, so werde die Folge der Paragraphen hier unterbrochen, und diese praktischen Methoden und Regeln als Einschaltungen bloß mit fortlaufenden Nummern bezeichnet.

Erste Abtheilung.

Praktische Methoden, die numerische Bestimmung der Ausdrücke betreffend.

1.

Sollen gegebene ganze, gebrochene oder gemischte Zahlen *) numerisch addirt, subtrahirt, multiplizirt, oder dividirt, und die Resultate dann (in so ferne sie wieder ganze, gebrochene oder gemischte Zahlen sind) auf's neue durch ähnliche numerische Operationen mit einander verbunden werden, so ist es, wenn man bloß das numerische Endresultat haben will, in den meisten Fällen vortheilhafter, die numerischen Bestimmungen nicht so einzeln und in der Reihe, wie sie der gegebene Ausdruck verlangt, statt finden zu lassen, sondern den gegebenen Ausdruck erst in einen andern ihm gleichen zu verwandeln, in welchem letztern aber die Zahl der Operationen höchst möglich verringert ist, oder sie selbst doch in leichtere verwandelt sind; dann aber diesen neuen Ausdruck erst numerisch zu bestimmen.

2.

Als besonders wichtig und vortheilhaft hebe man den Fall heraus, in welchem ein Quotient numerisch bestimmt werden soll, dessen Dividend und Divisor Produkte ganzer Zahlen sind; z. B. der Quotient

$$\frac{8 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 20}{10 \cdot 18 \cdot 24}.$$

Man bemerke:

α) Kommen in beyden Produkten gemeinschaftliche Faktoren vor, so lasse man diese oben und unten weg; setze z. B. statt

$$\frac{12 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5}{20 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 15} \quad \text{bloß} \quad \frac{12 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 5}{20 \cdot 15};$$

nach (§. 47. Nr. 10.).

*) Unter gemischter Zahl versteht man eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruche.

β) Kommen keine gemeinschaftlichen Faktoren mehr vor, so versuche man, einen Faktor des Zählers und einen Faktor des Nenners durch ein gemeinschaftliches Gemäß zu dividiren (und zwar durch das größte) und so oft dies angeht; und setze die numerischen Quotienten statt der Faktoren selbst in die Produkte hin. —

Statt obiger Quotienten z. B. erhält man jetzt:

$\frac{12 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 1}{20 \cdot 3}$, dann $\frac{3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 1}{5 \cdot 3}$, dann nach (α) $\frac{2 \cdot 8 \cdot 1}{5}$;

(§. 47. Nr. 2. u. Nr. 10.).

γ) Kann man aber weder (β) noch (α) mehr in Anwendung bringen, so fange man an, den Ausdruck selbst, so wie es die Bezeichnung verlangt, numerisch zu bestimmen. Und man erhält statt des obigen Quotienten, jetzt:

$\frac{16}{5}$ oder $3\frac{1}{5}$ (eigentlich $3+\frac{1}{5}$).

Anmerkung. 1. Wegen $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ kann man die Faktoren, welche 1 sind, ohne weiters weglassen.

Anmerkung 2. Auch findet das Gesagte noch statt, wenn der Dividend oder der Divisor an sich schon eine numerische ganze Zahl seyn sollte.

3.

Bey dem numerischen Multipliziren und Dividiren der Brüche kann vorstehende (Nr. 2.) besonders vortheilhaft in Anwendung gebracht werden, da die Produkte und die Quotienten zweyer Brüche immer auf solche Quotienten führen. (§. 74.).

4.

Bey dem Arbeiten mit Brüchen muß man besonders das Aufheben derselben nicht außer Acht lassen, welches darin besteht, daß man Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl dividirt, und zwar wo möglich durch das größte gemeinschaftliche Gemäß derselben, damit alle Brüche, so wie sie entstehen, sogleich in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt seyen. (§. §. 131 und 132.).

5.

Das (§. 106.) gezeigte Verfahren, um die Zahl N zu finden, welche bey Brüchen, die unter einerley Benennung gebracht werden sollen, zum kleinsten gemeinschaftlichen Nenner (General-Nenner genannt) dienen kann, ist, auf wirkliche Zahlen angewandt, nichts anderes, als das (§. 129. Nr. 10.) beschriebene Auffinden des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen; und letzteres nimmt sich im Praktischen so aus:

α) Man schreibe die gegebenen Zahlen neben einander hin, gehörig abgesondert, und mache zur Linken einen Vertikalstrich.

β) Man suche die Primzahl, durch welche wenigstens zwey der Zahlen getheilt werden, schreibe sie zur Linken des Striches, und dividire damit jede der durch sie theilbaren Zahlen; die numerischen Quotienten schreibe man an die Stelle der Zahlen selbst.

γ) Dieses Verfahren wiederhole man für die noch übrigen gegebenen Zahlen, und die nach (β) statt der andern gesetzten Maaße (Quotienten); und setze dieses so lange fort, als noch Primzahlen gefunden werden, durch welche wenigstens zwey der noch stehenden Zahlen theilbar sind.

δ) Findet man keine dergleichen Primzahl mehr auf, so ist das Produkt aller der zur linken des Vertikalstriches stehenden Primzahlen und der noch rechts unten stehenden Zahlen, das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen. (§. 129. Nr. 10.).

Es sey z. B. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 84, 27, 42, 49, 36, 24 zu finden. — Man erhält das Schema

2	84,	27,	42,	49,	36,	24
2	42,		21,		18,	12
3	21,				9,	6
3	7,	9,	7,		3,	2
7		3,			1,	
	1,		1,	7,		

und das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist

2·2·3·3·7·1·3·1·7·1·2 oder 2·2·3·3·7·3·7·2 oder 10584.

Anmerkung. 1. Man kann die 1, die sich ergeben, ohne weiteres weglassen.

Anmerkung. 2. Multiplizirt man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mit einer beliebigen ganzen Zahl, so hat man ein größeres gemeinschaftliches Vielfache derselben Zahlen.

Anmerkung. 3. Kommen unter den gegebenen Zahlen, oder unter den im Schema gleichzeitig entstehenden Zahlen, einige vor, die entweder dieselben sind, oder von denen die eine ein Vielfaches der andern ist, so kann man die gleichen Zahlen bis auf eine ohne weiter's durchstreichen, im andern Falle aber bloß das Vielfache beibehalten und die andern durchstreichen. Immer erhält man doch dasselbe kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

6.

Um denselben Zweck zu erreichen, könnte man auch jede der gegebenen Zahlen in ihre einfachen Faktoren zerlegen, und dann unmittelbar nach (§. 129. Nr. 10.) verfahren. — Für obiges Beyspiel erhielte man:

$$84 = 2\cdot2\cdot3\cdot7 \quad , \quad 27 = 3\cdot3\cdot3 \quad , \quad 42 = 2\cdot3\cdot7;$$
$$49 = 7\cdot7 \quad , \quad 36 = 2\cdot2\cdot3\cdot3 \quad , \quad 24 = 2\cdot2\cdot2\cdot3;$$

und aus diesen einfachen Faktoren das kleinste gemeinschaftliche Vielfache

$$= 2\cdot2\cdot3\cdot7\times3\cdot3\times7\times2,$$

wie oben auch.

7.

Dies erfordert aber wieder, daß man die einfachen Faktoren gegebener Zahlen zu finden im Stande sey. — Solches kann inzwischen nur versuchweise geschehen und zwar auf folgende Art (wenn z. B. 84 die gegebene Zahl ist):

α) Man suche die kleinste Primzahl (2), durch welche die gegebene Zahl theilbar ist, durch Versuche, setze sie hin, und dividire damit die gegebene Zahl numerisch (gibt 42.).

β) Diesen numerischen Quotienten (42) behandle man auf's neue, wie die gegebene Zahl selbst, und schreibe die Primzahl, die man hier erhält (2), zu der vorigen hin.

γ) Man fahre so fort, die jedesmaligen numerischen Quotienten auf's neue so zu behandeln, wie in (α) die gegebene Zahl selbst, bis man zuletzt den numerischen Quotienten 1 erhält.

δ) Die neben einander geschriebenen Primzahlen bilden dann die einfachen Faktoren der gegebenen Zahl.

8.

Um einen gegebenen Bruch in seinen kleinsten Zahlen auszudrücken, muß man Zähler und Nenner desselben durch ihr größtes gemeinschaftliches Gemäß dividiren. — Es wird aber das größte gemeinschaftliche Gemäß zweyer Zahlen z. B. 294 und 336 praktisch auf zwey Wegen gefunden. — Der erste davon ist folgender:

α) Man sucht die einfachen Faktoren der beyden gegebenen Zahlen, und erhält:

$$294 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7, \text{ und } 336 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

β) Das Produkt der, beyden gegebenen Zahlen gemeinschaftlichen Faktoren, ist dann das gesuchte größte gemeinschaftliche Gemäß der fraglichen Zahlen. — Man findet als solches $2 \cdot 3 \cdot 7$ oder 42 (§. 129.).

9.

Der zweyte Weg dagegen ist nachstehender:

α) Man dividirt die größere durch die kleinere der gegebenen Zahlen numerisch. Geht dies ohne Rest an, so ist die kleinere das gesuchte größte gemeinschaftliche Gemäß.

β) Im andern Falle (wenn beyde Zahlen nicht durch einander theilbar sind) bestimmt man den nächstkleinsten Quotienten und den Rest, und dividirt mit dem Rest in den Divisor numerisch. Ist dies möglich, so ist dieser Rest die gesuchte Zahl.

γ) Im andern Falle aber bestimme man wieder den nächstkleinsten Quotienten und den Rest, und dividire mit diesem Rest in den vorigen Rest numerisch.

δ) Dies Verfahren (γ) wiederhole man so lange, bis eine dieser numerischen Divisionen möglich ist (aufgeht), so daß kein Rest mehr bleibt.

ε) Der letzte Rest ist dann das gesuchte größte gemeinschaftliche Gemäß der beyden gegebenen Zahlen.

Man erhält folgendes Schema:

294	336	1
	294	
42	294	7
	294	
	—	—

folglich ist 42 das gesuchte größte gemeinschaftliche Gemäß.

Das Verfahren ergibt sich aus (§. 125. Nr. 4 u. Nr. 5).

Anmerkung 1. Will man das größte gemeinschaftliche Gemäß von mehreren gegebenen Zahlen finden, so verfahre man nach (§. 129. Nr. 12.).

Anmerkung 2. Auch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweyer Zahlen kann nun leicht nach (§. 129. Nr. 1.) gefunden werden; so wie dann auch nach (§. 129. Nr. 13.) das ste gemeinschaftliche Vielfache von beliebig viel gegebenen Zahlen.

10.

Soll ein Quotient, dessen Dividend und Divisor Produkte sind, numerisch bestimmt werden, und kommen unter den Faktoren auch gebrochene oder gemischte Zahlen vor (außer ganzen Zahlen), so multiplizire man den Dividenden und den Divisor mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweyer Nenner, von denen der eine im Dividenden, der andere aber im Divisor vorkommt; und setze dieses Verfahren mit jedem neuen dadurch entstehenden Quotienten so lange fort, bis ein Quotient entsteht, dessen Dividend und Divisor Produkte ganzer Zahlen sind, der dann nach (Nr. 2.) behandelt werden muß (§. 47. Nr. 1. §. 81. Nr. 1. §. 47. Nr. 7. u. Nr. 10.). — So erhält man z. B. statt des Quotienten

$$\frac{(3\frac{3}{4})\cdot\frac{5}{6}\cdot 14\cdot(2\frac{2}{5})}{(2\frac{5}{8})\cdot 10\cdot\frac{2}{3}}$$

indem man zuerst Dividend und Divisor mit 8 multiplizirt:

$$\frac{30 \cdot \frac{5}{6} \cdot 14 \cdot (2\frac{2}{5})}{21 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3}}, \text{ dann } \frac{30 \cdot 5 \cdot 14 \cdot (2\frac{2}{5})}{21 \cdot 10 \cdot 4},$$

endlich $\frac{30 \cdot 5 \cdot 14 \cdot 12}{21 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 5}$; und dieser, nach (Nr. 2.) behandelt,

gibt die ganze Zahl 6 als Endresultat.

11.

Bei dem numerischen Multipliziren und Dividiren gegebener Dezimalbrüche findet auch noch eine Art, diese Aufgabe zu lösen statt, welche die abgekürzte Multiplikation und die abgekürzte Division genannt wird. —

Es erhält nehmlich bekanntlich das numerische Produkt zweyer gegebenen Decimalbrüche 11 Decimalstellen, wenn der eine Faktor deren 6, der andre aber 5 derselben hat. Wünscht man daher vom Produkt ebenfalls nur die 5 oder 6 ersten Decimalstellen zu haben, so kann man die übrigen gleich während der Multiplikation weglassen. Das Verfahren besteht darin, daß man bei der numerischen Multiplikation der ganzen Zahlen, nach (§. 185.) im Multiplikator mit der Ziffer am weitesten zur Linken anfängt zu multipliziren, mit jeder der zur rechten folgenden Ziffern fortfährt, und natürlich dann die einzelnen entstehenden numerischen Produkte unter einander so setzt, daß jedes folgende um eine Stelle weiter zur Rechten gerückt wird, diese zur Rechten hinausgerückten (oder vielmehr hinauszurückenden) Stellen aber sogleich wegläßt, wie folgendes Beyspiel zeigt:

9,764327	9,764327
2,72953	2,72953
19528654	19528654
68350289	6835029
19528654	195286
87878943	87879
48821635	4882
29292981	293
26,65202347631	26,652023

Links steht die vollständige, rechts die abgekürzte Multiplikation.

Vergleicht man beyde, so abstrahirt sich leicht noch folgendes:

α) Man erreicht seinen Zweck, wenn man bey jeder folgenden Ziffer des Multiplikators (von der Linken zur Rechten) eine Ziffer (von der Rechten zur Linken) des Multiplikanden wegläßt, und nur noch die zur Linken stehenden Ziffern des Multiplikanden multiplizirt.

β) Man muß aber doch auch eine oder zwey der zunächst vorhergehenden und nach (α) wegzulassenden Ziffern des Multiplikanden in Gedanken multipliziren, um so ohngefähr zu wissen, wie viel von den frühern Produkten zu dem, welches erst hingeschrieben wird, noch hinübergezählt werden müsse.

γ) So viel Vorsicht man auch anwendet, so stimmt doch die letzte Dezimalstelle nicht immer mit derjenigen derselben Ordnung des vollständigen Produkts überein.

δ) Um diesem einigermaaßen vorzubeugen, hat man auch die Regel: die Ziffer, welche zu dem jedesmaligen zuerst hingeschriebenen Produkt, von dem vorhergehenden (aber weggelassenen Produkt) noch hinzugenommen werden muß, um 1 zu erhöhen, sobald die andere zur Rechten stehende >5 ist.

ε) Ist m die Anzahl der Dezimalen des Multiplikanden, n aber die Anzahl derselben des Multiplikators und p die Zahl der im Schema des abgekürzten Produkts unter einander geschriebenen Reihen, so bekommt das abgekürzte Produkt

$$m+n-(p-1) \text{ oder } m+n+1-p \text{ Dezimalen.}$$

ζ) Es gehört viel Uebung dazu, um das abgekürzte Produkt mit dem wahren, so viel wie möglich übereinstimmend zu erhalten.

12.

Seltener anwendbar ist die abgekürzte Division der Dezimalbrüche. Diese besteht aber darin, daß man bei der numerischen Division der ganzen Zahlen, statt jedesmal eine Ziffer

des Dividenden (die auch eine angehängte Null seyn kann) herabzusetzen, lieber eine Ziffer zur Rechten des Divisors wegläßt, und dies so lange wiederholt, bis der Divisor nur noch drey, zwey und zuletzt nur noch eine Ziffer hat. Es sey z. B. der Dezimalbruch 4,0798437 durch diesen andern 1,29764 numerisch zu dividiren. Man erhält:

```
1,29764 |4,0798437.....| 3,1440489
        |3 89292.......|
          ------------
           186923.....
           129764.....
           ----------
            571597....
            519056....
            ---------
             525410...
             519056...
             --------
              635400..
              519056..
              --------
              1163440.
              1038112.
              --------
               1253280
               1167876
               -------
                 85404  u. f. w. f.
```

Die abgekürzte Division gibt:

```
1,29764 |4,0798437|3,1440489
        |3 89292..|
          ---------
            186923.
            129764.
            -------
             571597
             519056
             ------
12976  |52541
       |51906
       ------
1297   | 635
       -----
129    | 635
         519
       -----
12     | 116
         104
       -----
1      |  12
         9
       -----
         3
```

Vergleicht man beyde Schema, so findet man leicht:

α) Der Quotient muß bei der abgekürzten Division in der Regel größer werden. Man muß daher, um diesem Uebel vorzubeugen, die weggelassenen Stellen des Divisors auf eine ähnliche Art wie (Nr. 11. β.) in Rechnung bringen.

β) Der Quotient bekommt (m+p—1)—n oder (m+p)—(n+1) Dezimalstellen, wenn m die Anzahl der benutzten Dezimalen des Dividenden, n die Anzahl derer des Divisors, und p die Anzahl aller zur Division benutzten (ganzen oder Dezimal-) Stellen des Divisors bezeichnet.

Zweyte Abtheilung.

Praktische Methoden, die Verwandlung allgemeiner Ausdrücke betreffend.

Wenn bei allgemeinen, Buchstaben enthaltenden Ausdrücken, es einerley ist, in welcher Ordnung diese Buchstaben geschrieben werden, so schreibe man sie jedesmal, so viel wie möglich, in alphabetischer Ordnung.

13.

Bei Produkten aus Buchstaben allein, oder aus Ziffern-Ausdrücken und Buchstaben, schreibe man die Buchstaben in alphabetischer Ordnung, die Ziffern-Ausdrücke dagegen zur Linken (vorne an) (§. 54.). — Man schreibe also statt a·7·b·c, lieber 7abc.

Die in einem solchen Produkt voranstehenden Ziffern-Ausdrücke nennt man auch die Koeffizienten, sobald sie ganzen oder gebrochenen Zahlen gleich sind.

14.

Dieselbe Regel beobachte man, wenn zwey Produkte, z. B. 7ac und 5bd mit einander multiplizirt werden sollen, und schreibe daher 7·5·abcd. — Gewöhnlich multiplizirt man gleich beyde Koeffizienten numerisch, und erhält dann 35abcd (§. 54.).

15.

Auch wenn dergleichen Produkte, z. B. 12acd und 4c durch einander dividirt werden sollen, pflegt man die Ziffern-Ausdrücke zuerst numerisch zu dividiren. Man schreibt also statt $\frac{12acd}{4c}$, zunächst $\frac{12}{4} \cdot \frac{acd}{c}$, und dann 3ad (§. 74.).

16.

Bey jeder algebraischen Summe sehe man jedesmal genau zu, ob sie nicht gleiche Glieder hat, von denen das eine ein addirtes, das andere ein subtrahirtes ist; um sie gegenseitig weglassen zu können. (§. 37.).

17.

Sind Produkte, wie in (Nr. 3.) oder (Nr. 14.) zu einander zu addiren oder von einander zu subtrahiren, so sehe man darauf, ob die Buchstaben-Faktoren in beyden gemeinschaftlich sind; denn dann lassen sich die Summen und die Differenzen dieser Produkte, nach (§. 81. Nr. Nr. 1 u. 2.) oder nach (§. 102.), in ein solches Produkt verwandeln. —

So erhält man statt der Summe:

7ab+9ab+5ab,

das Produkt (7+9+5). ab oder 21·ab; eben so statt der Differenz

16acd—9acd, das Produkt 7acd.

18.

Wegen $a = 1 \cdot a = a \cdot 1$ kann man sich jeden Ausdruck a als ein Produkt denken, dessen Koeffizient 1 ist.

Auf diese Weise erhält man statt der Summe

$9\frac{cp}{q} + 4\frac{cp}{q} + \frac{cp}{q}$ das Produkt $(9+4+1)\frac{cp}{q}$ oder $14\frac{cp}{q}$.

Eben so statt der Differenz $ax - x$, das Produkt $(a-1)x$. (§. 103.).

19.

Bei jeder vorkommenden algebraischen Summe ist sorgfältig nachzusehen, ob sie nicht Glieder hat, wie die in (Nr. 17. und Nr. 18.) erwähnten, weil solche sehr einfach in ein Glied vereinigt werden können, nach (§. 37. und §. §. 34. 35.).

Z. B. statt der algebraischen Summe

$$17ab - \tfrac{7}{3}ac + 14a - \tfrac{3}{2}ac + 7b + 2ac - 7abc$$

kann man setzen, die ihr gleiche:

$$17ab + 14a + 7b - 7abc + (-\tfrac{7}{3} - \tfrac{3}{2} + 2)ac$$

oder

$$17ab + 14a + 7b - 7abc - \frac{11}{6}ac.$$

Vorzüglich anwendbar ist das hier Gesagte da, wo algebraische Summen addirt oder subtrahirt werden sollen.

20.

Bei jedem Quotienten zweyer Produkte hat man nachzusehen, ob diese Produkte nicht gemeinschaftliche Faktoren haben, um Dividend und Divisor durch sie dividiren zu können, und sonach einen einfachern Quotienten zu erhalten. —

Z. B. statt

$$\frac{24(ax - x^2)bd(ax + x^2)}{3b(a^2 - x^2)xy},$$

erhält man als ihm gleich, den Quotienten $\frac{8 \cdot d \cdot x}{y}$. —

Es ist nehmlich

$$ax - x^2 = (a-x)x, \quad \text{und} \quad (ax + x^2) = (a+x)x,$$

so wie auch $a^2 - x^2 = (a+x)(a-x)$; folglich obiger Quotient

$$= \frac{24 \cdot (a-x) \cdot x \cdot b \cdot d \cdot (a+x) \cdot x}{3 \cdot b \cdot (a-x) \cdot (a+x) \cdot x \cdot y},$$

dahero auch $= \frac{8 \cdot d \cdot x}{y}$ (§. 47. Nr. 10.).

21.

Um einen Ausdruck in Faktoren zu zerlegen, kann man sich zuweilen mit Vortheil nachstehender Formeln bedienen:

$\alpha)\ a^2-b^2 = (a+b)(a-b),$

$\beta)\ a^3-b^3 = (a^2+ab+b^2)(a-b),$

$\gamma)\ a^3+b^3 = (a^2-ab+b^2)(a+b),$

$\delta)\ a^4-b^4 = (a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)$

$= (a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)$

$= (a^2+b^2)(a+b)(a-b),$

$\varepsilon)\ a^5-b^5 = (a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b),$

$\zeta)\ a^5+b^5 = (a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b),$

und ähnliche mehr.

So erhält man z. B. statt

$$-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$$

erstlich

$$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2;$$ dann nach (α)

$$[2ab+(a^2+b^2-c^2)]\cdot[2ab-(a^2+b^2-c^2)]$$

oder

$$[(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2];$$

folglich nach (α):

$$[(a+b)+c][(a+b)-c]\cdot[c+(a-b)][c-(a-b)];$$

oder

$$(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a-b+c)\,(-a+b+c).$$

Dieses Verwandeln gegebener algebraischer Summen in Produkte, ist auch bei der numerischen Bestimmung gegebener Ausdrücke oft von sehr großem Nutzen.

22.

Sind mehrere Quotienten mit einander zu multipliziren, so kann man, ehe man nach (§. 74.) verfährt, erst von irgend einem der Dividenden und von irgend einem der Divisoren die, beyden gemeinschaftlichen Faktoren weglassen. —

So z. B. erhält man statt

$$\frac{5ac}{bde}\cdot\frac{7bfg}{3ad}$$ zunächst $$\frac{5c}{de}\cdot\frac{7fg}{3d},$$ dann $$\frac{35cfg}{3dde}.$$

23.

Wegen $a = \frac{a}{1}$ kann derselbe Vortheil noch benutzt werden, wenn auch nicht alle Faktoren Quotienten sind;

Z. B. statt

$4ab \cdot \frac{3cde}{2aab} \cdot \frac{1}{5cf}$, erhält man $\frac{6de}{5af}$.

24.

Derselbe Vortheil findet statt, wenn zwey Quotienten durch einander dividirt werden sollen, nach (§. 74.).

25.

Nicht minder auch, wenn Brüche und ganze Zahlen mit einander numerisch zu multipliziren oder zu dividiren sind.

26.

Sind mehrere Ausdrücke mit einander zu multipliziren, die theils additive Zahlen, theils subtraktive sind, so multiplizire man unmittelbar ihre Glieder und setze dem Produkt ein (—) Zeichen vor, wenn die Anzahl der subtraktiven Faktoren ungerade ist; in jedem andern Falle aber ein (+) Zeichen. — Bey der Multiplikation der Glieder dieser additiven und subtraktiven Zahlen, können dann wiederum die in den vorhergehenden Nummern bemerkten Vortheile angewandt werden. —

So erhält man z. B.

statt $\frac{5ac}{bde} \cdot \left(-\frac{7bfg}{3ad}\right)$, jetzt $-\frac{35cfg}{3dde}$,

statt $(-4ab) \cdot \left(-\frac{3cde}{2aab}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5cf}\right)$, jetzt $-\frac{6de}{5af}$,

u. s. w. (§. 100).

27.

Soll eine subtraktive Zahl mit einer positiven ganzen Zahl potenzirt werden, so potenzirt man ebenfalls nur das Glied der subtraktiven Zahl, und setzt dem Resultat ein (—) Zeichen vor, wenn

wenn der Exponent eine ungerade Zahl ist, während es ungeändert bleibt, so lange der Exponent eine gerade Zahl.

Z. B. statt

$\left(-\frac{2a}{3}\right)^7$ bekommt man $-\left(\frac{2a}{3}\right)^7$, oder $-\frac{2^7 \cdot a^7}{3^7}$, oder $-\frac{128a^7}{2187}$,

Dagegen statt $\left(-\frac{2a}{3}\right)^4$ hat man $\left(\frac{2a}{3}\right)^4$, oder $\frac{16a^4}{81}$. (§. 154 Nr. 4.).

28.

Sollen zwey algebraische Summen, deren Glieder alle oder zum Theil solche Produkte wie (Nr. 14. u. Nr. 15.) sind, mit einander multiplizirt, oder durch einander dividirt werden, welches nach (§. §. 107. 108.) geschieht, so müssen die meisten der vorhergehenden Nummern in Anwendung gebracht werden. Uebrigens hat man bloß nach den angeführten Paragraphen zu verfahren.

Beyspiel 1. Es seyen die beyden algebraischen Summen

$$2a - 3b - \tfrac{2}{3}c + 4\frac{d}{f} + \tfrac{1}{2}g$$

und $$-3a + 2b + 4c + 9\frac{d}{f} - \tfrac{2}{5}h$$

mit einander zu multipliziren.

Man erhält zunächst nach (§. 107.):

$$-6a^2 + 9ab + 2ac - 12\frac{ad}{f} - \tfrac{3}{2}ag$$

$$+ 4ab - 6b^2 - \tfrac{4}{3}bc + 8\frac{bd}{f} + bg$$

$$+ 8ac - 12bc - \tfrac{8}{3}c^2 + 16\frac{cd}{f} + 2cg$$

$$+ 18\frac{ad}{f} - 27\frac{bd}{f} - 6\frac{cd}{f} + 36\frac{d^2}{f^2} + \tfrac{9}{2}\frac{dg}{f}$$

$$- \tfrac{4}{5}ah + \tfrac{6}{5}bh + 1\tfrac{4}{5}ch - \tfrac{8}{5}\frac{dh}{f} - \tfrac{1}{5}gh$$

und statt dieser algebraischen Summe von 25 Gliedern kann man nach (§. §. 37. 35. 34.) und (Nr. 19.) folgende setzen, welche nur 19 Glieder hat:

$$-6a^2+13ab+10ac-6b^2-\tfrac{40}{3}bc+6\frac{ad}{f}-\tfrac{3}{2}ag-\tfrac{4}{5}ah+\tfrac{6}{5}bh-\tfrac{8}{3}c^2-19\frac{bd}{f}$$
$$+bg+\tfrac{4}{15}ch+10\frac{cd}{f}+2cg-\tfrac{8}{5}\frac{dh}{f}+36\frac{d^2}{f^2}+\tfrac{9}{2}\frac{dg}{f}-\tfrac{1}{5}gh$$

und welche dem Produkte der beyden gegebenen algebraischen Summen gleich seyn muß.

Beispiel. 2. Es sey die algebraische Summe

$$-10a^2+11ab+6b^2-5ad-38bc-2bd+40c^2+10cd$$

durch diese zweite algebraische Summe

$$4c+2a+d-3b$$

zu dividiren.

Man erhält, zunächst nach (§. 108.) verfahrend, sogleich eine unendliche Menge von Resultaten, in so ferne der erste Summand jedesmal ganz willkürlich angenommen werden kann. Einige Uebung bringt es aber leicht dahin, jedesmal das einfachste Resultat sogleich zu erhalten. Man darf zu dem Ende nur die Glieder des Divisors nehmen und sehen, ob sich nicht zu ihnen beziehlich Glieder des Dividenden auffinden lassen, so daß letztere beziehlich durch erstere dividirt, wenigstens einerley Buchstaben-Resultate geben. Findet sich solches, so dividirt man eines dieser Glieder des Dividenden durch das beziehliche Glied des Divisors, und nimmt diesen Quotienten als ersten Summanden an.

Obige Aufgabe kann diesem nach, unter folgendes Schema gebracht werden:

Divisor	Dividend	Quot.
$4c+2a+d-3b$	$-10a^2+11ab+6b^2-5ad-38bc-2bd+40c^2+10cd$	$-5a$
Div. $\times -5a =$	$-20ac-10a^2-5ad+15ab$	
Differenz $=$	$20ac-4ab+6b^2-38bc-2bd+40c^2+10cd$	$+10c$
Divisor $\times 10c =$	$40c^2+20ac+10cd-30bc$	
Differenz $=$	$-4ab+6b^2-8bc-2bd$	$-2b$
Divisor $\times -2b =$	$-8bc-4ab-2bd+6b^2$	
	Differenz $=$ Null.	

Der gesuchte einfachste algebraische Quotient der beyden gegebenen algebraischen Summen ist daher

$$-5a-2b+10c.$$

Anmerkung. Man erleichtert sich das Operiren mit solchen algebraischen Summen sowohl, als mit andern solchen Ausdrücken sehr, wenn man überall, wo es erlaubt ist, die einzelnen Theile des Ausdrucks so

ordnet, daß die Buchstaben alle einzeln, so viel wie nur immer möglich ist, in der Ordnung des Alphabeths auf einander folgen. — Daher ist dieses Ordnen eine wohl zu beachtende Regel.

29.

Der Quotient zweyer algebraischen Summen wird dadurch zuweilen viel einfacher, daß man den Dividenden und den Divisor in Produkte verwandelt.

Z. B. statt des Quotienten $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$, hat man $\frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}$, folglich auch $\frac{a+b}{a-b}$.

30.

Soll eine algebraische Summe, deren Glieder alle oder zum Theil Quotienten sind, in einen Quotienten verwandelt werden, so kann man ebenfalls nach (§. §. **104. 105. 106.**) verfahren, in so ferne die dort angewandten Sätze der Theorie, gerade so auch hier angewandt werden können.

Es sey z. B. die algebraische Summe

$$\frac{p}{4qx}-\frac{r}{8aq}+\frac{b}{3(a^2-ax)}-\frac{t}{ax-x^2}$$

in einen Quotienten zu verwandeln. — Der Generaldivisor findet sich

$$24aqx(a-x)$$

und die Dividenden der einzelnen Quotienten sind beziehlich:

$$6ap(a-x),\quad 3rx(a-x),\quad 8bqx,\quad 54aqt$$

so wie die, den einzelnen gegebenen Gliedern gleichen Quotienten, beziehlich:

$$\frac{6ap(a-x)}{24aqx(a-x)},\quad \frac{3rx(a-x)}{24aqx(a-x)},\quad \frac{8bqx}{24aqx(a-x)},\quad \frac{24agt}{24aqx(a-x)}$$

und der gesuchte Quotient

$$\frac{6ap(a-x)-3rx(a-x)+8bqx-24aqt}{24aqx(a-x)}.$$

31.

Auch erhält man, unter der Voraussetzung, daß man lauter absolute Wurzeln habe, *)

$$\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{xx}} = \frac{\sqrt{ax}}{x},$$

$$\sqrt{\frac{ab}{x^2(a-x)}} = \sqrt{\frac{ab(a-x)}{x^2(a-x)^2}} = \frac{\sqrt{ab\,(a-x)}}{x\,(a-x)},$$

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{y},$$

$$\sqrt[3]{\frac{ab\,(a-x)}{x^2 \cdot y \cdot (a+x)^2}} = \sqrt[3]{\frac{ab(a-x)(a+x)x \cdot y^2}{x^3 \cdot y^3 \cdot (a+x)^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{ab\,(a-x)\,(a+x)\,xy^2}}{xy(a+x)} = \frac{\sqrt[3]{[abxy^2\,(a^2-x^2)]}}{xy\,(a+x)}.$$

Endlich auch

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{(xy^{n-1})}}{y};$$ u. s. w. s.

32.

Multiplizirt man eine algebraische Summe mehreremale mit sich selbst, so erhält man nach und nach ihre zweite, dritte, vierte u. s. w. Potenz. Soll nun, unter der Voraussetzung, daß alle diese algebraischen Summen absoluten Zahlen gleich sind, aus einer dieser letztern algebraischen Summen, die erstere, welche beziehlich der zweiten, dritten, vierten u. s. w. Wurzel gleich ist, gefunden werden, so kann dies nur versuchsweise geschehen.

Es sey z. B., unter obiger Voraussetzung, die der Wurzel:

$$\sqrt{\left(9x^2-30ax-3a^2x+25a^2+5a^3+\frac{a^4}{4}\right)}$$

---

*) Statt $\sqrt[2]{}$ schreibt man gewöhnlich nur $\sqrt{}$, und denkt sich den Wurzel-Exponenten 2 noch hinzu.

gleiche algebraische Summe zu finden. — Unter den Gliedern des Radikanden finden sich $9x^2$, $25a^2$, $\frac{a^4}{4}$, welche vollständige Quadrate sind, deren Wurzeln beziehlich $3x$, $5a$ und $\frac{a^2}{2}$ sind. Eine aus diesen Gliedern zusammengesetzte algebraische Summe kann nun die gesuchte seyn; ob aber $3x+5a-\frac{a^2}{2}$, oder $3x-5a+\frac{a^2}{2}$, oder $-3x+5a+\frac{a^2}{2}$, oder $3x-5a-\frac{a^2}{2}$ u. s. w. f. muß versuchweise entschieden werden.

Sollte, unter derselben Voraussetzung, *)

$$\sqrt[3]{(8x^6+48cx^5+60c^2x^4-80c^3x^3-90c^4x^2+108c^5x-27c^6)}$$

in eine algebraische Summe verwandelt werden, so fände man im Radikanden die Glieder $8x^6$, $80c^3x^3$, $27c^6$, welche vollständige dritte Potenzen zu seyn scheinen. —

Die Ausdrücke $2x^2$, $4cx$, $3c^2$ sind daher wahrscheinlich Glieder der gesuchten algebraischen Summe. Ob aber $2x^2-4cx+3c^2$, oder $-2x^2-4cx-3c^2$, oder $-2x^2+4cx-3c^2$, oder $2x^2+4cx-3c^2$ u. s. w. f., diese selbst sey? müssen die Versuche lehren.

Man erleichtert sich diese Versuche, wenn man Glied um Glied der gesuchten algebraischen Summe zu entwickeln unternimmt, auf eine der (§. 188.) erwähnten ähnlichen Art.

Die Arbeit bekommt dann folgende Gestalt:

Für das erste Beyspiel:

Radikand.	gesuchte algeb. Summe
$9x^2-30ax-3a^2x+25a^2+5a^3+\frac{a^4}{4}$	$3x-5a-\frac{a^2}{2}$
$9x^2$	
$6x \mid -30ax-3a^2x+25a^2+5a^3+\frac{a^4}{4}$	
$\quad -30ax \quad +25a^2$	
$6x-10a \mid -3a^2x+5a^3+\frac{a^4}{4}$	
$\quad -3a^2x+5a^3+\frac{a^4}{4}$	
— — —	

*) Daß alle Radikanden absoluten Zahlen gleich sind.

Man findet auf dieselbe Weise, wenn man $-3x$ als erstes Glied nimmt, auch

$$-3x+5a+\frac{a^2}{2}.$$

Welche von beyden algebraischen Summen allen Forderungen der Aufgabe Genüge leiste, kann erst in jedem besondern Fall angegeben werden.

Für das zweite Beyspiel erhält man:

$$\begin{array}{l|l}
8x^6+48cx^5+60c^2x^4-80c^3x^3-90c^4x^2+108c^5x-27c^6 & 2x^2+4cx-3c^2 \\
8x^6 & \\
\hline
12x^4 & 48cx^5+60c^2x^4-80c^3x^3-90c^4x^2+108c^5x-27c^6 \\
 & 48cx^5+96c^2x^4+64c^3x^3 \\
\hline
12x^4+48cx^3+48c^2x^2 & -36c^2x^4-144c^3x^3-\ 90c^4x^2+108c^5x-27c^6 \\
 & -36c^2x^4-144c^3x^3-144c^4x^2 \\
 & +\ 54c^4x^2+103c^5x-27c^6 \\
 & \overline{} \\
 & -\quad\ -\quad\ -\quad\ -
\end{array}$$

so daß sich also $2x^2+4cx-3c^2$ als die der gegebenen dritten Wurzel gleiche algebraische Summe findet.

33.

Enthält eine algebraische Summe Glieder, welche Wurzeln oder Produkte aus Wurzeln sind, so kann man zuweilen, unter obiger Voraussetzung, *) bedeutend einfachere setzen. —

So z. B. erhält man

$$2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}=8\sqrt{2}$$

und

$$\sqrt[3]{(54a^{m+6}b^3)}-\sqrt[3]{(16a^{m-3}b^6)}+\sqrt[3]{(2a^{4m+9})}+\sqrt[3]{(2c^3a^m)}$$
$$=(3a^2b-\frac{2b^2}{a}+a^{m+3}+c)\sqrt[3]{(2a^m)}.$$

Diese Abkürzung solcher Ausdrücke besteht aber im wesentlichen darin, daß man die Radikanden in Produkte verwandelt, die alle einen gemeinschaftlichen Faktor haben, und in denen der andere Faktor so ist, daß aus ihm das Wurzelzeichen ganz wegfallen kann.

*) Daß alle Radikanden, so wie die Wurzeln selbst, absoluten Zahlen gleich sind.

Es ist nämlich

$8 = 4 \cdot 2$, folglich $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,

$18 = 9 \cdot 2$, . . . $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$,

$72 = 36 \cdot 2$, . . . $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$,

und $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Eben so ist

$$54a^{m+6}b^3 = 27a^6b^3 \cdot (2a^m),$$

folglich $\sqrt[3]{(54a^{m+6}b^3)} = 3a^2b \cdot \sqrt[3]{2a^m}$;

auch $$16a^{m-3}b^6 = 8a^{-3}b^6 \cdot (2a^m);$$

also $\sqrt[3]{(16a^{m-3}b^6)} = 2a^{-1}b^2\sqrt[3]{2a^m} = \frac{2b^2}{a}\sqrt[3]{(2a^m)}$;

u. s. w. f.

34.

Das Produkt zweyer oder mehrerer Wurzeln, deren Wurzel-Exponenten verschieden sind, kann, wie folgt, einfach in eine Wurzel verwandelt werden. — So wie man nämlich, wegen $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, Brüche unter gleiche Benennung bringen kann, so kann man auch Wurzeln vermittelst des Satzes

$$\sqrt[m]{(a^n)} = \sqrt[mp]{(a^{np})} \text{ (§. 149. Nr. 42.)}$$

in andere verwandeln, die ihnen beziehlich gleich sind, aber einerlei Wurzel-Exponenten haben.

Statt des Produkts:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{\tfrac{1}{3}} \cdot \sqrt[8]{3}$$

erhält man dann:

$$\sqrt[24]{(2^8)} \cdot \sqrt[24]{(\tfrac{1}{3})^4} \cdot \sqrt[24]{(3^3)},$$

oder $\sqrt[24]{(2^8 \cdot (\frac{1}{3})^4 \cdot 3^3)}$, oder $\sqrt[24]{\binom{2^8}{3}}$, oder $\sqrt[24]{\frac{256}{3}}$.

35.

Der Formel

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\left(\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}\right)},$$

die nach (§. 149.) erwiesen wird (aber unter der Voraussetzung daß alle vorkommenden Radikanden absoluten Zahlen gleich sind), kann man sich oft mit Vortheil bedienen, um die Quadrat-Wurzel aus einer algebraischen Summe, deren Glieder selber wieder Wurzeln enthalten, in eine ähnliche algebraische Summe zu verwandeln. —

Sie gibt z. B.:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3},$$

$$\sqrt{87-12\sqrt{42}} = 3\sqrt{7}-2\sqrt{6},$$

$$\sqrt{a^2+b+2a\sqrt{b}} = a+\sqrt{b},$$

$$\sqrt{b^2-ab+\frac{a^2}{4}+\sqrt{4ab^3-8a^2b^2+a^3b}} = \sqrt{ab}+\sqrt{b^2-2ab+\frac{a^2}{4}}.$$

36.

Umgekehrt kann man auch gegebene Ausdrücke mit sich multipliziren und dann aus dem Quadrat wieder die zweite Wurzel ausziehen, um einen dem gegebenen gleichen Ausdruck zu erhalten, der in manchen Fällen sehr einfach werden kann. So z. B. erhält man auf diese Weise statt

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}},$$

den Ausdruck $\sqrt{2a\pm 2\sqrt{a^2-b}}$.

Eben so statt:

$$\sqrt{\left(\frac{abf+c^2}{bc}+\sqrt{\frac{4af}{b}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{abf+c^2}{bc}-\sqrt{\frac{4af}{b}}\right)},$$

erhält man den sehr einfachen Ausdruck

$$\sqrt{\frac{4af}{c}}$$

Anmerkung. Man muß aber bey allen diesen Verwandlungen mit Wurzeln ja nicht aus der Acht lassen, daß sie nur unter der Voraussetzung statt finden können, daß die Wurzeln wirklich eine Bedeutung haben, und daß sie hier zunächst nur unter der Voraussetzung aufgestellt sind, daß ihre Radikanden absoluten Zahlen gleich seyen.

Zahlenlehre.

Neuntes Kapitel.

Von den Bestimmungsgleichungen im Allgemeinen, und von der Auflösung der einfachen algebraischen Gleichungen mit einem und mit mehren Unbekannten.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Begriffe.

§. 211. Erklärung.

Die Gleichungen, wie z. B. die der (§. §. 16—18. 50—52. 117. und 139—144.), welche an sich nicht, sondern nur unter der Voraussetzung richtig sind, daß einer oder mehre der darin vorkommenden Buchstaben x, y, z, ꝛc. bestimmte Ausdrücke vorstellen, nenne man Bestimmungs-Gleichungen, in so ferne sie gewöhnlich dazu dienen, die noch unbekannten, unter x, y, z, ꝛc. vorgestellten Ausdrücke zu bestimmen. — Eine Gleichung dagegen, die an sich richtig ist, d. h. in welcher man sich um die Bedeutung keines der Buchstaben bekümmert, (welche richtig ist und bleibt, was man sich auch unter jedem der einzelnen Buchstaben vorgestellt denken mag), heiße von nun an zum Unterschied, eine identische Gleichung.

§. 212. Zusatz.

Die Bestimmungsgleichungen unterscheiden sich also von den identischen nur der Form nach; dem Wesen nach sind sie ebenfalls keine andern als identische Gleichungen; weil jede Gleichung nur das Verhalten der Operationen zu einander ausspricht, folglich unabhängig existirt von dem womit operirt worden ist; und dies ist eben der Karakter der hier identisch genannten Gleichungen.

§. 213. Erklärung.

Die Bestimmungsgleichungen werden eingetheilt in Gleichungen mit einem, zwey, drey ꝛc. und mehr Unbekannten. — Jede dieser wieder in algebraische und in transcendente; und die algebraischen wieder in Gleichungen der (s) 1ten, 2ten, 3ten, ꝛc. nten Ordnung (Grades). — Die des ersten Grades oder der ersten Ordnung heißen auch einfache; die des zweiten Grades werden auch quadratische Gleichungen genannt; und unter kubischen und biquadratischen Gleichungen versteht man die des 3ten und 4ten Grades. — Alle nicht einfachen algebraischen Gleichungen werden auch höhere genannt. — In folgendem Schema erkennt man die hieher gehörigen Definitionen:

I. Gleichungen mit einem Unbekannten.

I. 1) Algebraische:

1) $ax + b = 0$, oder $ax = b$;
2) $ax^2 + bx + c = 0$, oder $ax^2 + bx = c$;
3) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$;
4) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$;
5) $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$;
6) $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots + px + q = 0$.

I. 2) Transcendente: Alle diejenigen Gleichungen, welche durch keine Umwandlung auf diese vorstehenden Formen gebracht werden können.

II. Gleichungen mit 2 Unbekannten x und y.

II. 1) Algebraische:

1) $ay + bx + c = 0$, oder $ax + by = c$;

2) $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$;

3) $ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + kx + l = 0$;

4) $ay^4 + bxy^3 + cx^2y^2 + dx^3y + ex^4 + fy^3 + gxy^2 + hx^2y + kx^3 + ly^2 + mxy + nx^2 + py + qx + r = 0$;

u. s. w. f.

II. 2) Transcendente: Alle diejenigen Gleichungen mit 2 Unbekannten, welche durch keine Umwandlung auf eine der vorstehenden Formen gebracht werden können.

III. Gleichungen mit 3 Unbekannten x, y, z.

III. 1) Algebraische:

1) $az + by + cx + d = 0$, oder $ax + by + cz = d$;

2) $az^2 + byz + cy^2 + dxz + exy + fx^2 + gz + hy + kx + l = 0$;

u. s. w. f.

III. 2) Transcendente:

IV. Gleichungen mit 4 Unbekannten x, y, z, t.

IV. 1) Algebraische:

1) $at + bz + cy + dx + e = 0$;

2) $at^2 + bzt + cz^2 + dyt + eyz + fy^2 + gxt + hxz + kxy + lx^2 + mt + nz + py + qx + r = 0$;

u. s. w. f.

IV. 2) Transcendente: Alle diejenigen Gleichungen mit 4 Unbekannten, welche durch keine Umwandlung auf diese vorstehenden Formen gebracht werden können.

V. Gleichungen mit beliebig viel Unbekannten.

§. 214. Erklärung.

Die Ausdrücke, welche in diesen algebraischen Gleichungen mit den Unbekannten oder ihren Potenzen und Produkten multiplizirt

erscheinen, heißen die Koeffizienten der Gleichung; und eine Gleichung selbst heißt nach einem oder nach mehren Unbekannten geordnet, wenn sie, in Bezug auf diesen Unbekannten, oder in Bezug auf diese mehren Unbekannten, auf eine der vorstehenden Formen gebracht ist. — Die Koeffizienten einer algebraischen Gleichung können übrigens alle beliebigen Werthe haben, also auch 0 seyn; nur würde die Gleichung zu einer niedrigern Ordnung (zu einem niedrigern Grade) gezählt werden müssen, wenn alle Koeffizienten der Glieder der höchsten Dimensionen 0 würden, weil dann alle diese Glieder herausfielen; also nur die der niedrigern Dimensionen noch vorhanden wären.

Sind in einer höhern Gleichung, die nach dem Unbekannten x vom mten Grade ist, alle Koeffizienten $= 0$, bis auf den von x^m und den letztern, so daß sie auf die Form gebracht werden kann

$$x^m = a,$$

so heißt sie eine reine höhere Gleichung vom mten Grade.

§. 215. Erklärung.

Hat man die Ausdrücke gefunden, welche statt der Unbekannten x, y, ꝛc. ꝛc. in die Gleichungen gesetzt, solche zu wahren, richtigen, d. h. identischen Gleichungen machen, so sagt man: „die Gleichungen wären aufgelöst." — Und die Gleichungen haben eine oder mehre Auflösungen, je nachdem für jeden Unbekannten nur ein einziger, oder mehr einander nicht gleiche Ausdrücke existiren, welche die Eigenschaft haben, daß sie, statt der Unbekannten gesetzt, die Gleichungen zu identischen machen.

Zweyte Abtheilung.

Auflösung der einfachen algebraischen Gleichungen mit einem oder mit mehr Unbekannten.

---

§. 216. Aufgabe.

Die einfache algebraische Gleichung

$$1)\quad ax+b=0,$$

nach dem Unbekannten x aufzulösen.

Auflösung. Man hat aus ihr zunächst

$$2)\quad ax=-b,$$

dann

$$3)\quad x=-\frac{b}{a},$$

und $-\frac{b}{a}$ ist der gesuchte durch x vorgestellte Ausdruck.

Beweis. Man sehe (§. 117. und §. 16.).

§. 217. Zusatz.

Die einfache algebraische Gleichung hat allemal eine Auflösung, wenn a nicht Null ist (§. 216.), und dann nur eine einzige.

Denn jeder Werth α, welcher statt x gesetzt, die Gleichung $ax+b=0$ identisch macht, macht auch jede aus ihr nach (§. 82.) abgeleitete Gleichung, also auch die Gleichung $x=-\frac{b}{a}$ identisch, so daß $\alpha=-\frac{b}{a}$ identisch seyn muß.

§. 218. Zusatz.

Ist aber $a=0$, so gilt nach (§. 96.) die allgemeine Auflösung $x=-\frac{b}{a}$ für diesen Fall nicht mehr, sondern es zeigt die Form $x=\frac{0}{0}$ an, daß x jedweden Werth haben könne, während $x=-\frac{b}{0}$ anzeigt, daß die Aufgabe einen Widerspruch ent-

halte und daß kein Werth von x existire, der ihr genügen könnte, wie solches bereits (§. 118.) auseinander gesetzt sich findet.

Dem Quotienten von der Form $\frac{b}{0}$ oder $\frac{-b}{0}$, wo b nicht Null seyn soll, kann man die Form $\frac{1}{0}$ gegeben sich denken, indem man es sich erlaubt, auf ihn den Satz (§. 47. Nr. 10.) anzuwenden und den Dividenden und den Divisor zugleich durch b oder durch —b zu dividiren. — Erscheint also ein unbekannter Ausdruck x unter der Form $\frac{1}{0}$, so gibt es keinen solchen, welcher der gegebenen Gleichung genügen könnte, d. h. welcher statt x gesetzt, diese gegebene Gleichung identisch machen könnte.

Anmerkung 1. Man muß jedoch nicht übersehen, daß a von der Form $a_1 \cdot (p-q)$ und zu gleicher Zeit b von der Form $b_1 \cdot (p-q)$ seyn kann; oder mit andern Worten, daß die Gleichung $ax+b=0$ dadurch entstanden seyn kann, daß man eine andere $a_1 \cdot x+b_1=0$, mit $p-q$ multiplizirt hat, so daß sie in

$a_1 \cdot (p-q) \cdot x+b_1 \cdot (p-q)=0$ d. h. $(a_1 p-a_1 q)x+b_1 p-b_1 q=0$

d. h. in $a \cdot x+b \quad =0$

übergegangen ist, indem man $a_1 p-a_1 q$ durch a, und $b_1 \cdot p-b_1 \cdot q$ durch b bezeichnete. Nachgehends konnte für spezielle Werthe von p und q, die Differenz $p-q$ Null geworden seyn, so daß auch $a=0$ und $b=0$ wurde, weil sie den Faktor $p-q$ (jetzt Null) enthielten. — Dann bleibt zwar immer noch wahr, daß die Gleichung

$$ax+b=0$$

identisch wird, man mag statt x setzen, was man nur immer will; aber man kann sich doch nebenher auch fragen, durch welchen Werth von x die erstere Gleichung

$$a_1 \cdot x+b_1=0$$

identisch wird, diejenige nämlich, welche aus der gegebenen hervorgegangen seyn würde, wenn man den, den Koeffizienten a und b gemeinschaftlichen Faktor $p-q$, zeitig genug, d. h. noch ehe er 0 geworden ist, bemerkt, und durch ihn die Gleichung $ax+b$ wegdividirt hätte. Und für diesen Fall findet man $x=-\frac{b_1}{a_1}$, welchen Werth jedoch der vorige Ausdruck $x=-\frac{b}{a}=-\frac{b_1(p-q)}{a_1(p-q)}=\frac{0}{0}$ ebenfalls geliefert hätte,

wenn man den gemeinschaftlichen Faktor p—q, der jetzt Null geworden war, aufgesucht, und Zähler und Nenner von $\frac{b}{a}$ durch ihn wegdividirt hätte.

In diesem Sinne, und nur in diesem, kann man daher zuweilen nach den wahren Werthen solcher Quotienten fragen, welche in speziellen Fällen die Form $\frac{0}{0}$ angenommen haben.

Anmerkung 2. Wenn in der Gleichung $ax = b$, welche die Auflösung $x = \frac{b}{a}$ hat, a seiner Natur nach nothwendig reel ist und nach und nach vom positiven durch Null zum negativen übergeht, während b ebenfalls reel ist, aber denselben Werth behält, so wird, abgesehen vom (+ oder —) Zeichen, der Quotient $\frac{b}{a}$ immer grösser, je kleiner a wird: ja, wenn $a = \frac{1}{10^m}$, so ist $\frac{b}{a} = b : \frac{1}{10^m} = b \cdot 10^m$, so daß also, während a dem Werthe 0 immer näher rückt, der Quotient $\frac{b}{a}$ jede gegebene Größe erreichen und übersteigen kann. In diesem Sinne, aber auch nur in diesem, kann man sagen: „x oder $\frac{b}{0}$ wäre unendlich groß", wenn nämlich b selbst nicht Null ist. Die Redensart: „der Unbekannte x sey jetzt unendlich groß", kann aber immer in keinem andern Sinne genommen werden, als: der Unbekannte x (wird nach und nach immer größer und kann zuletzt jede gegebene Größe erreichen und übersteigen, je kleiner nach und nach der Nenner a gedacht wird, und je weniger dieser Nenner von 0 (Null) verschieden ist. Immer kann der Nenner nicht genau und völlig Null gedacht werden, weil man dann nicht mehr durch ihn wegdividiren durfte (§. 96.).

§. 219. Aufgabe.

Die beyden einfachen Gleichungen

1) $a \cdot y + b \cdot x = c$,

2) $a_1 \cdot y + b_1 \cdot x = c_1$,

nach den beyden Unbekannten x und y aufzulösen.

Auflösung. Man löse die erste der beyden gegebenen Gleichungen z. B., nach y auf, d. h. man finde einen Ausdruck

(der

(der auch noch x enthalten wird), welcher statt y in die Gleichung (1.) gesetzt, solche identisch macht; und man findet hier

$$3) \qquad y = \frac{c - bx}{a}.$$

Da nun, was man auch statt x setzen mag, wenn $\frac{c-bx}{a}$ statt y gesetzt wird, die erste Gleichung immer identisch wird, die zweite aber dadurch in

$$4) \qquad a_1 \cdot \frac{c-bx}{a} + b_1 x = c_1$$

übergeht, so muß diese ebenfalls noch identisch gemacht werden. Also muß man diese noch nach x auflösen.

Ordnet man sie aber nach Anleitung des (§. 117.), so erhält man, mit a wegmultiplizirend:

$$-a_1 b \cdot x + ab_1 \cdot x = ac_1 - a_1 c;$$

und dann: $$(ab_1 - a_1 b) \cdot x = ac_1 - a_1 c,$$

woraus die Auflösung

$$5) \quad x = \frac{ac_1 - a_1 c}{ab_1 - a_1 b} = \frac{a_1 c - ac_1}{a_1 b - ab_1}$$ hervorgeht.

Dieser Werth von x, und der zugehörige $y = \frac{c-bx}{a}$ d. h

$$6) \quad y = \frac{b_1 c - bc_1}{ab_1 - a_1 b} = \frac{bc_1 - b_1 c}{a_1 b - ab_1} \; *)$$

machen also beyde Gleichungen (1 und 2.) identisch, sind demnach die gesuchten Werthe von x und von y.

---

*) Es ist nämlich

$$bx = \frac{abc_1 - a_1 bc}{ab_1 - a_1 b}, \quad c - bx = \frac{ab_1 c - abc_1}{ab_1 - a_1 b};$$

und daraus

$$y = \frac{c-bx}{a} = \frac{b_1 c - bc_1}{ab_1 - a_1 b};$$

und wenn man dieses Quotienten Dividend und Divisor zugleich mit −1 multiplizirt, so erhält man nach (§. 47. Nr. 10.) auch den andern Ausdruck.

§. 220. Zusatz.

So lange nicht $ab_1 - a_1b = a_1b - ab_1 = 0$ ist, haben die beyden gegebenen Gleichungen (1. und 2. des §. 219.) allemal eine Auflösung nach x und nach y, und dann aber auch nur eine einzige.

Denn jeder Werth α von x, der mit einem Werth β von y, die beyden gegebenen Gleichungen (1. 2. §. 219.) identisch macht, macht auch alle nach (§. 82.) aus ihnen abgeleiteten Gleichungen, mithin auch die Gleichungen (5. und 6. des §. 219.) identisch, so daß also α kein anderer Werth von x seyn kann, als der oben gefundene, und β kein anderer Werth von y, als der für ihn (§. 219.) bereits gefundene.

§. 221. Zusatz.

Ist dagegen $ab_1 - a_1b = 0$ oder $a_1 = \frac{ab_1}{b}$, so sind die beyden gegebenen Gleichungen folgende:

$$ay + bx = c,$$

$$\frac{ab_1}{b}\, y + b_1 x = c_1;$$

oder, wenn man die zweite mit b multiplizirt, und durch b_1 dividirt, folgende:

1) $ay + bx = c,$

2) $ay + bx = \frac{bc_1}{b_1};$

und es sind nun zwey Fälle möglich. Entweder es ist $c = \frac{bc_1}{b_1}$, d. h. $b_1c - bc_1 = 0 = bc_1 - b_1c$; oder es findet diese letztere Annahme nicht statt.

Im erstern Falle ist auch $a_1c - ac_1 = \frac{ab_1c}{b} - ac_1 = \frac{a}{b}(b_1c - bc_1) = 0$; im andern Falle nicht.

Unter der erstern Voraussetzung fallen die beyden gegebenen Gleichungen in eine einzige zusammen, und ihr wird genügt, wenn $y = \frac{c - bx}{a}$ und x ganz willkürlich genommen wird; — also

auf unendlich viele verschiedene Arten. Im andern Falle enthalten die beyden Gleichungen einen Widerspruch, weil sie, wenn man die eine von der andern subtrahirt, $c - \frac{bc_1}{b_1} = 0$, d. h. $b_1c - bc_1 = 0$ geben, d. h. etwas $= 0$ geben, was nach der Voraussetzung nicht Null ist.

So oft also die allgemeinen Auflösungen

$$x = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} \quad \text{und} \quad y = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}$$

die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so oft fallen beyde gegebene Gleichungen in eine einzige zusammen, welche auf unendlich viele Arten identisch wird. So oft aber einer dieser beyden allgemeinen Werthe von x und y die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, so oft enthalten die beyden gegebenen Gleichungen einen Widerspruch, welcher durch keinen Werth von x oder y gehoben werden kann.

Anmerkung. Doch muß man auch hier die Anmerkung (2.) des (§. 218.) beherzigen.

§. 222. Zusatz.

Weil aber bey den (§. 219.) gegebenen einfachen Gleichungen

1) $ay + bx = c$,
2) $a_1y + b_1x = c_1$,

nur eine einzige Auflösung statt findet, so wird derselbe Werth eines der Unbekannten aus jeder Gleichung gefunden, welche den andern Unbekannten nicht mehr enthält, mag solche aus den gegebenen Gleichungen irgend wie hervorgegangen seyn. — Daher wird man dieselbe Auflösung der beyden gegebenen Gleichungen überhaupt erzielen

1) wenn man aus ihnen eine neue Gleichung ableitet, welche einen der Unbekannten z. B. y nicht mehr enthält, d. h. wenn man y aus ihnen wegschafft oder eliminirt;
2) wenn man diese neue Gleichung (die Eliminations-

gleichung genannt) nach dem andern Unbekannten x auflöst;

3) wenn man den so gefundenen Werth von x, in irgend eine der gegebenen oder der aus ihnen hervorgegangenen Gleichungen, die aber noch y enthält, statt x setzt, und die so entstehende Gleichung vollends nach y auflöst.

§. 223. Zusatz.

Unter den Methoden, aus zweyen einfachen Gleichungen

1) $a \cdot y + b \cdot x = c$

und 2) $a_1 \cdot y + b_1 \cdot y = c_1$

einen der Unbekannten z. B. y zu elimininen (d. h. wegzuschaffen), zeichnen sich vorzüglich folgende viere aus:

1) Die Substitutions-Methode. Sie besteht darin, daß man aus der einen der gegebenen Gleichungen y findet, in x ausgedrückt, und diesen Werth statt y in die zweite der gegebenen Gleichungen setzt.

So findet sich aus (1.):

$$y = \frac{c - bx}{a},$$

und dies in (2.) statt y gesetzt, gibt:

$$a_1 \frac{c - bx}{a} + b_1 x = c_1,$$

welches die gesuchte Eliminationsgleichung ist.

2) Die Kombinations-Methode. Sie besteht darin, daß man y aus beyden Gleichungen findet in x ausgedrückt, und diese beyden Ausdrücke einander gleich setzt.

So gibt sich

aus (1.).... $y = \frac{c - bx}{a}$,

und aus (2.).... $y = \frac{c_1 - b_1 x}{a_1}$;

und es ist also

$$\frac{c - bx}{a} = \frac{c_1 - b_1 x}{a_1}$$

die gesuchte Eliminationsgleichung.

3) Die englische Methode. Sie besteht darin, daß man jede der gegebenen Gleichungen mit einer Zahl multiplizirt, diese Zahl aber so wählt, daß die neuen Gleichungen den Unbekannten y mit einerley Koeffizienten versehen, enthalten. Dann werden diese neuen Gleichungen zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, je nachdem durch das eine oder das andere dieser Unbekannte y herausfällt.

So multiplizirt man die erste Gleichung mit a_1, die andere und erhält

$$aa_1y+a_1bx = a_1c$$
$$aa_1y+ab_1x = ac_1.$$

Und diese von einander subtrahirt, geben:

$$(a_1b-ab_1)\,x = a_1c-ac_1,$$

elches die gesuchte Eliminationsgleichung ist.

Die Zahlen, womit jede Gleichung multiplizirt werden muß, man aber jedesmal, wenn man von den beyden Koeffizienten von y, nämlich a und a_1, das gemeinschaftliche Vielfache sucht (hier aa_1), und dann mit jedem dieser Koeffizienten a oder a_1 in dieses Vielfache (aa_1) dividirt, ganz ähnlich dem Verfahren, wodurch Brüche unter einerley Benennung gebracht werden.

Die französische Methode. Sie besteht darin, daß man nur eine der gegebenen Gleichungen mit einem noch ganz unbestimmten Ausdruck α multiplizirt, die neue Gleichung zur andern addirt, und dann, da für α jedweder Werth genommen werden kann, den Werth von α so nimmt, daß der Koeffizient von y in der letzt erhaltenen Gleichung 0 wird, also das mit y affizirte Glied herausfallen muß.

Multiplizirt man also die zweite Gleichung mit α und addirt sie zur ersten, so erhält man

$$(a_1\alpha+a)\cdot y+(b_1\alpha+b)\cdot x = c_1\alpha+c.$$

Und nimmt man hier α so, daß

$$a_1\alpha+a = 0 \text{ d. h. } \alpha = -\frac{a}{a_1} \text{ wird,}$$

so hat man

$$[b_1 \cdot \left(-\frac{a}{a_1}\right) + b] \cdot x = c \cdot \left(-\frac{a}{a_1}\right) + c,$$

welches die gesuchte Eliminationsgleichung ist.

§. 224. Aufgabe.

Es sind gegeben 3 einfache Gleichungen zwischen 3 Unbekannten x, y und z, nämlich

1) $ax + by + cz = d$
2) $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
3) $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$;

man soll sie nach x, y und z auflösen.

Auflösung und Beweis. Man findet aus der 1ten Gleichung z in x und y ausgedrückt; nämlich

$$4)\ z = \frac{d - ax - by}{c}.$$

Dieser Werth von z, statt z gesetzt, macht die erste Gleichung identisch; die beyden andern aber in

$$a_1x + b_1y + c_1\left(\frac{d - ax - by}{c}\right) = d_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2\left(\frac{d - ax - by}{c}\right) = d_2,$$

d. h., wenn man mit c wegmultiplizirt und ordnet,

in 5) $(a_1c - ac_1)x + (b_1c - bc_1)y = cd_1 - c_1d$

und 6) $(a_2c - ac_2)x + (b_2c - bc_2)y = cd_2 - c_2d$

übergehen, welche noch durch dazu gehörige Werthe von x und von y, identisch werden müssen; welche Gleichungen also nun nach x und nach y aufzulösen sind.

Sie geben aber, nach (§. §. 219—223.) verfahrend:

$$x = \frac{(a_1c - ac_1)(cd_2 - c_2d) - (a_2c - ac_2)(cd_1 - c_1d)}{(a_1c - ac_1)(b_2c - bc_2) - (a_2c - ac_2)(b_1c - bc_1)}$$

$$y = \frac{(b_2c - bc_2)(cd_1 - c_1d) - (b_1c - bc_1)(cd_2 - c_2d)}{(a_1c - ac_1)(b_2c - bc_2) - (a_2c - ac_2)(b_1c - bc_1)}$$

oder

$$7)\ x = \frac{ac_2d_1 + a_1cd_2 + a_2c_1d - ac_1d_2 - a_1c_2d - a_2cd_1}{ab_1c_2 + a_1b_2c + a_2bc_1 - ab_2c_1 - a_1bc_2 - a_2b_1c}$$

$$8)\ y = \frac{b_2cd_1+b_1cd_2+bc_1d_2-b_2c_1d-b_1cd_2-bc_2d_1}{ab_1c_2+a_1b_2c+a_2bc_1-ab_2c_1-a_1bc_2-a_2b_1c}.$$

Für diese Werthe von x und y, geht aber der obige Ausdruck $z = \frac{d-ax-by}{c}$, welcher die erste Gleichung identisch macht, in

$$9)\ z = \frac{ac_2d_1+a_1cd_2+a_2c_1d-ac_1d_2-a_1c_2d-a_2cd_1}{ab_1c_2+a_1b_2c+a_2bc_1-ab_2c_1-a_1bc_2-a_2b_1c}$$

über; und dies sind also die gesuchten Werthe von x, y und z, welche alle 3 Gleichungen (1—3.) identisch machen.

§. 225. Zusatz.

So oft der Nenner

$$ab_1c_2+a_1b_2c+a_2bc_1-ab_2c_1-a_1bc_2-a_2b_1c$$

nicht Null ist, so oft haben die 3 gegebenen Gleichungen (1.—3. §. 224.) allemal eine Auflösung, und allemal nur eine einzige.

Denn jeder Werth von x, y, z, für welche die 3 gegebenen Gleichungen (1.—3.) identische sind, macht auch alle aus ihnen hervorgegangenen, also namentlich auch die Gleichungen (7. 8. und 9.) identisch, ist also dem eben gefundenen gleich.

§. 226. Zusatz.

Ist der Divisor

$$ab_1c_2+a_1b_2c+a_2bc_1-ab_2c_1-a_1bc_2-a_2b_1c$$

der Null gleich, so sind die 3 Dividenden von x, y und z in (7. 8. und 9.) entweder alle oder keiner der Null gleich, wie man sich aus (§. 221.) in Verbindung mit der Auflösungsweise des (§. 224.) bald überzeugt. — Im erstern Falle, wo (7. 8. u. 9.) in $\frac{0}{0}$ übergehen, fallen die 3 gegebenen Gleichungen in eine einzige oder nur in zweye zusammen, je nachdem nämlich die beyden Eliminationsgleichungen (5. und 6.) für jeden Werth von x und y bereits identisch sind, oder nicht an sich schon identisch, sondern nur nicht wesentlich von einander verschieden sind, also in eine einzige zusammenfallen.

Im andern Falle dagegen, wo von den 3 Dividenden keiner der Null gleich ist, und wo also die 3 Werthe von x, die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, enthalten die 3 Gleichungen einen Widerspruch, so daß es keine Werthe von x, y und z jetzt gibt, welche sie alle dreye zugleich identich machen könnten.

§. 227. Zusätze.

Und weil diese 3 einfachen Gleichungen abermals nur eine einzige Auflösung zulassen, so erhält man nothwendig dieselben Werthe von x, y, z, man mag die gegebenen Gleichungen (1.—3.) oder irgend welche aus ihnen hervorgegangene, zu Hilfe nehmen.

Man kann daher außer dem (§. 224.) beschriebenen, noch eine Menge verschiedener Wege betreten, zur Auflösung der 3 einfachen Gleichungen

$$1)\quad ax + by + cz = d$$
$$2)\quad a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$3)\quad a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

zu gelangen.

Man kann nämlich aus den Gleichungen (1. und 2.) dann aus 1. und 3.), endlich auch aus (2. und 3.), nach den Methoden des (§. 223.), z eliminiren, und man erhält dadurch 3 Gleichungen zwischen x und y, von denen je zweye ausreichen, die Werthe von x und y zu geben. Und setzt man diese dann in irgend eine der Gleichungen, in welcher aber noch z vorkommen muß, statt x und statt y, so findet man aus ihr sogleich noch z dazu.

Man kann aber auch mittelst der französischen Methode, sogleich 2 Unbekannte z. B. x und y, auf einmal eliminiren. Zu dem Behufe multiplizirt man die zweite der gegebenen Gleichungen mit α, die dritte mit β, addirt beyde letztern Gleichungen zur ersten, und erhält:

$$4)\quad (a + \alpha a_1 + \beta a_2)x + (b + \alpha b_1 + \beta b_2)y + (c + \alpha c_1 + \beta c_2)z = (d + \alpha d_1 + \beta d_2),$$

wo α und β ganz beliebige Werthe vorstellen können.

Denkt man sich aber die Werthe von α und β so genommen, daß sie die beyden Koeffizienten von x und von y zu Null, d. h.

$$5)\quad a+a_1\alpha+a_2\beta = 0$$
$$6)\quad b+b_1\alpha+b_2\beta = 0$$

machen, so wird obige Gleichung (4) in

$$7)\quad (c+\alpha c_1+\beta c_2)z = d+\alpha d_1+\beta d_2$$

übergehen, wo aber α und β die durch Auflösung der Gleichungen (5. und 6.) sich ergebenden Werthe vorstellen.

Denkt man sich α und β so, daß die Koeffizienten von x und von z in (4.) Null werden, so hat man

$$8)\quad (b+\alpha b_1+\beta b_2)y = d+\alpha d_1+\beta d_2,$$

wo aber α und β die aus den Gleichungen

$$9)\quad a+a_1\alpha+a_2\beta = 0$$
$$10)\quad c+c_1\alpha+c_2\beta = 0$$

hervorgehenden Werthe vorstellen.

Dann ist offenbar auch noch

$$11)\quad (a+\alpha a_1+\beta a_2)x = d+\alpha d_1+\beta d_2,$$

wo aber α und β die Werthe vorstellen, welche sich aus der Auflösung der Gleichungen

$$12)\quad b+b_1\alpha+b_2\beta = 0$$
$$13)\quad c+c_1\alpha+c_2\beta = 0$$

für α und für β ergeben.

Anmerkung. Auch die englische Methode, wenn z allein eliminirt werden soll, kann eine kleine Veränderung in ihrer Anwendung erleiden.

Will man nämlich, wenn aus den 3 Gleichungen

$$1)\quad 2x+3y-6z = 12,$$
$$2)\quad -x+4y+4z = 7,$$
$$3)\quad 5x-2y+8z = 10,$$

z eliminirt werden soll, nicht direkt nach (§. 227.) verfahren, und also nicht z zuerst aus (1. und 2.), dann aus (1. und 3.) und aus (2. und 3.) eliminiren, so kann man sogleich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller 3 Koeffizienten von z aufsuchen, d. h. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 6, 4 und 8; (man findet 24;) und diese Zahl 24 als den Koeffizienten von z in den 3 neuen Gleichungen ansehen, mit

6, 4 und 8 in 24 dividiren, endlich mit den Quotienten 4, 6, 3 die einzelnen der gegebenen Gleichungen multipliziren; und man erhält dann:

4) $8x+12y-24z = 48$
5) $-6x+24y+24z = 42$
6) $15x-6y+24z = 30.$

Und nun kann man (4. und 5.) oder (4. u. 6.) addiren oder (6. u. 5.) von einander subtrahiren, und erhält

7) $2x+36y = 90$
8) $23x+6y = 78$
9) $-21x+30y = 12$, oder $-7x+10y = 4$,

von welchen 3 Gleichungen irgend zweye ausreichen um x und y zu finden.

§. 228. Zusatz.

Es ist übrigens nun sehr leicht einzusehen, wie verfahren werden müsse, um n einfache Gleichungen zwischen n Unbekannten nach den letztern aufzulösen. — Dabey folgt noch allemal:

1) So lange der Divisor in den für die Unbekannten gefundenen allgemeinen Ausdrücken nicht Null wird, so lange ist allemal eine Auflösung der Aufgabe möglich, aber auch nur eine einzige.

2) Wird aber in einem besondern Falle, der gedachte Divisor $= 0$, so werden entweder alle allgemeinen Werthe der Unbekannten $= \frac{0}{0}$, wenn man sich bey einem derselben überzeugt hat, daß kein dem Zähler und Nenner gemeinschaftlicher und zu Null gewordener Faktor Ursache ist, oder alle werden $= \frac{1}{0}$.

3) Werden diese Ausdrücke $= \frac{0}{0}$, so zeigt dies allemal an, daß die Gleichungen nicht alle von einander unabhängig sind, sondern in eine geringere Anzahl zusammenfallen.

4) Werden aber die allgemeinen Werthe in einem besondern Fall $= \frac{1}{0}$, so zeigt dies an, daß die n gegebenen Gleichungen einen Widerspruch enthalten, daher nie alle zu gleicher Zeit statt finden können.

§. 229. Zusatz.

Sind nur m einfache und wirklich von einander unabhängige Gleichungen zwischen einer größern Zahl n von Unbekannten gegeben, so kann man m von den n Unbekannten in die n—m übrigen ausdrücken. Diesen n—m übrigen kann man nun ganz beliebige Werthe beylegen, und erhält jedesmal die zugehörigen Werthe der erstern m Unbekannten, so daß die angenommenen und die dazu gefundenen Werthe aller n Unbekannten, den gegebenen m Gleichungen ein Genüge leisten.

So oft also weniger Gleichungen gegeben sind, als Unbekannte, diese Gleichungen aber einfache sind und sich dabey nicht widersprechen, so oft kann man für die Unbekannten nach Willkühr eine beliebige unendliche Menge von Auflösungen entwickeln, die in so ferne sie zusammengehörige sind, den gegebenen Gleichungen ein Genüge leisten.

Anmerkung. Dasselbe gilt aber nicht bloß von den einfachen sondern auch von beliebigen algebraischen Gleichungen, so wie auch von den transcendenten, unter der Voraussetzung jedoch, daß die nöthigen Auflösungen wirklich entwickelt, oder doch als möglich gedacht werden können.

Beispiel 1. Ist gegeben die Gleichung

$$ax + by = c,$$

zwischen den beyden Unbekannten x und y, so findet man z. B.

$$x = \frac{c - by}{a},$$

wo y jeden beliebigen Werth repräsentirt. — Setzt man nun z. B.

$$y = \frac{a}{b}, \text{ so wird } x = \frac{c - a}{a},$$

und diese beyden Werthe von x und von y leisten der gegebenen Gleichung ein Genüge. — Hätte man statt y einen beliebigen andern Werth gesetzt, so würde man auch für x einen andern Werth erhalten, und beyde zusammengehörigen Werthe würden der Gleichung wiederum ein Genüge geleistet haben.

Beispiel 2. Ist gegeben die Gleichung

$$ax + by + cz = d$$

zwischen den 3 Unbekannten x, y, z, so findet man z. B. $x = \frac{d - by - cz}{a}$, wo y und z jeden beliebigen Ausdruck repräsentiren.

Beispiel 3. Wären dagegen gegeben die beyden Gleichungen

$$ax+by+cz = d \quad \text{und} \quad mx+ny+pz = q$$

zwischen den 3 Unbekannten x, y und z, so würde man gefunden haben

$$y = \frac{(d-cz)m-(q-pz)a}{bm-an}$$

$$\text{und} \quad x = \frac{(q-pz)b-(d-cz)n}{bm-an}$$

oder

$$y = \frac{dm-aq+(pa-cm)z}{bm-an}$$

$$\text{und} \quad x = \frac{bq-dn+(cn-bp)z}{bm-an},$$

wo z jeden beliebigen Ausdruck repräsentirt.

Aehnliche Beispiele lassen sich leicht für 4 und für beliebig viel Unbekannte, zwischen denen man eine geringere Anzahl von Gleichungen hat, aufstellen.

§. 230. Zusatz.

Führen daher allgemeine Auflösungen mehrerer Gleichungen mit eben so viel Unbekannten in einem besondern Fall zu der Form $\frac{0}{0}$, doch ohne daß diese Form von einem gemeinschaftlichen und zu Null gewordenen Faktor herrührt, so ist dies ein Zeichen, daß die gegebenen Gleichungen unendlich viele Auflösungen zulassen, in so ferne dann weniger von einander unabhängige Gleichungen gegeben sind, als Unbekannte.

§. 231. Zusatz.

Sind aber mehr Gleichungen gegeben als Unbekannte, z. B. n Gleichungen zwischen m Unbekannten, wo $n > m$ ist, so kann man die m Unbekannten aus m beliebigen dieser n Gleichungen finden und diese Werthe in die n—m übrigen Gleichungen statt der Unbekannten setzen, und man hat dann n—m (Eliminations-) Gleichungen, die gar keinen Unbekannten, sondern lauter gegebene Ausdrücke enthalten. Daher sind nur zwey Fälle denkbar, 1) entweder diese Gleichungen sind in der That alle identisch, und dann folgt, daß die n Gleichungen nicht alle von einander unabhängig waren, sondern daß man eigentlich nur m oder

eine geringere Zahl von einander wirklich unabhängiger Gleichungen hatte, mit eben so viel Unbekannten; oder 2) diese n—m Gleichungen widersprechen sich alle oder zum Theil gerade zu, und dies ist dann ein Beweis, daß diese n Gleichungen nicht zugleich mit einander bestehen können, daß also die Voraussetzung, unter der sie entstanden sind, für diesen Fall nicht mehr Statt habe.

Im allgemeinen sind die n—m Eliminationsgleichungen als die Bedingungen anzusehen, welche erfüllt seyn müssen, wenn die gegebenen n Gleichungen eine Bestimmung ihrer m Unbekannten zulassen sollen.

Anmerkung. Was aber zuletzt von einfachen Gleichungen gesagt wurde, gilt mit den nöthigen Modifikationen von allen beliebigen algebraischen Gleichungen nicht minder, eben so wie von den transcendenten Gleichungen, jedoch unter der Voraussetzung, daß jede erforderliche Auflösung wirklich entwickelt, oder doch als möglich gedacht werden könne.

§. 232. Zusatz.

So oft daher n Gleichungen in Bezug auf n Unbekannte, einfache nnd wirklich von einander unabhängige Gleichungen sind, die sich auch nicht widersprechen, so oft haben diese n Unbekannten bestimmte Werthe. Hat man daher aus den gegebenen n Gleichungen durch beliebige Verbindung mit einander, n neue Gleichungen abgeleitet, die nach denselben n Unbekannten einfache und noch von einander unabhängige sind, so bezeichnen diese n Unbekannten noch immer dieselben Werthe, so daß diese letztern n Gleichungen in Bezug auf die Bestimmung der n Unbekannten, die erstern n gegebenen Gleichungen gänzlich ersetzen.

Es ist dies aber deshalb vorzüglich wichtig, weil man aus gegebenen Gleichungen, öfters andere ableiten kann, aus denen die Bestimmung der Werthe der Unbekannten weit einfacher und leichter hervorgeht, als geradezu aus den gegebenen.

Beispiel 1. Es seyen gegeben die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} ax+ay+az&=f\\ bx+by+bv&=g\\ cx+cz+cv&=h\\ dy+dz+dv&=k \end{aligned}\right\} A$$

und solche nach x, y, z, v, aufzulösen.

Man leite zuerst daraus ab

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=\frac{f}{a}\\ x+y+v&=\frac{g}{b}\\ x+z+v&=\frac{h}{c}\\ y+z+v&=\frac{k}{d} \end{aligned}\right\} B$$

Nun addire man diese 4 Gleichungen und erhält

$$x+y+z+v=\tfrac{1}{3}\left(\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}+\frac{k}{d}\right) (C).$$

Von dieser Gleichung C die Gleichungen B eine nach der andern subtrahirt, gibt:

$$v=\tfrac{1}{3}\left(\frac{-2f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}+\frac{k}{d}\right),$$

$$z=\tfrac{1}{3}\left(\frac{f}{a}-\frac{2g}{b}+\frac{h}{c}+\frac{k}{d}\right),$$

$$y=\tfrac{1}{3}\left(\frac{f}{a}+\frac{g}{b}-\frac{2h}{c}+\frac{k}{d}\right),$$

$$x=\tfrac{1}{3}\left(\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}-\frac{2k}{d}\right),$$

oder

$$v=\frac{-2bcdf+acdg+abdh+abck}{3abcd}$$

$$z=\frac{bcdf-2acdg+abdh+abck}{3abcd},$$

$$y=\frac{bcdf+acdg-2abdh+abck}{3abcd},$$

$$x=\frac{bcdf+acdg+abdh-2abck}{3abcd},$$

welches die Auflösungen der gegebenen Gleichungen seyn müssen.

Beispiel 2. Sind gegeben und nach x, y und z, aufzulösen die Gleichungen

$$1)\ ax+hy=cxy,$$
$$2)\ ex+fz=gxz,$$
$$3)\ hy+kz=lyz;$$

so dividire man die erste durch xy, die 2te durch xz, und die 3te durch yz, und man erhält

$$4)\ a\cdot\frac{1}{y}+b\cdot\frac{1}{x}=c,$$
$$5)\ e\cdot\frac{1}{z}+f\cdot\frac{1}{x}=g,$$
$$6)\ h\cdot\frac{1}{z}+k\cdot\frac{1}{y}=l;$$

und man betrachte in diesen neuen Gleichungen nicht mehr x, y, z, sondern $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ als die zu suchenden Unbekannten, so sind solche jetzt einfache Gleichungen, welche nach (§. §. 224 ꝛc.) aufgelöst werden können und geben

$$\frac{1}{x}=\frac{cek+agh-ael}{afh+bek},$$
$$\frac{1}{y}=\frac{cfh-bgh+bel}{afh+bek},$$
$$\frac{1}{z}=\frac{afl+bgk-cfk}{afh+bek},$$

woraus dann sogleich hervorgeht, weil $x=1:\frac{1}{x}$, und $1:\frac{p}{q}=\frac{q}{p}$ ist:

$$x=\frac{afh+bek}{cek+agh-ael},$$
$$y=\frac{afh+bek}{cfh-bgh+bel},$$
$$z=\frac{afh+bek}{afl+bgk-cfk}.$$

Anmerkung. Weil man aber oben durch xy, xz, yz dividirt hat, so hat man vorausgesetzt, daß x, y, z nicht Null sind. Man muß daher noch untersuchen, ob nicht auch x oder y oder z der Null gleich seyn kann; und da findet man sogleich, daß $x=0$, $y=0$, $z=0$ ebenfalls Werthe sind, welche den gegebenen Gleichungen (1. 2. 3.), die nicht einfache sind, ebenfalls noch genügen, außer denen, die so eben in Bruchform gefunden worden sind.

Mehre hieher gehörige Uebungsbeispiele.

1) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& s \\ x-y &=& d \end{array}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(s+d) \\ y = \frac{1}{2}(s-d) \end{array}\right\}$

2) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} 4x-3y &=& 130 \\ 2x+5y &=& 216 \end{array}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 55 \\ y &=& 30 \end{array}\right\}$

3) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} -x+3y &=& 104 \\ 5x-2y &=& 78 \end{array}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 34 \\ y &=& 46 \end{array}\right\}$

4) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} 5x-8\frac{1}{2} &=& 7y-44 \\ 2x &=& y+\frac{5}{7} \end{array}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4\frac{1}{2} \\ y &=& 8\frac{2}{7} \end{array}\right\}$

5) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} ax &=& by \\ x+y &=& c \end{array}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{array}{l} x = bc : (a+b) \\ y = ac : (a+b) \end{array}\right\}$

6) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{a}{b-y} &=& \frac{b}{3a+x} \\ ax-2by &=& d \end{array}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{-6a^2+2b^2+d}{3a} \\ y = \frac{-3a^2+b^2-d}{3b} \end{array}\right\}$

7) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{8x}{7} &=& \frac{5(x-y)}{3} - 6 \\ \frac{3x-y}{9}+5 &=& \frac{4y+3x}{6} \end{array}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{702}{37} = 18\frac{36}{37} \\ y = \frac{612}{259} = 2\frac{94}{259} \end{array}\right\}$

8) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} ax-by &=& c \\ \frac{p-qy}{r}-c &=& \frac{my}{d} \end{array}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{array}{l} y = \frac{dp-cdr}{mr+dq} \\ x = \frac{cmr+cdq+bdp-bcd}{amr+adq} \end{array}\right\}$

9) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 30 \\ 8x-4y+2z &=& 50 \\ 27x-9y+3z &=& 64 \end{array}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{2}{3} \\ y &=& 7 \\ z &=& 36\frac{1}{3} \end{array}\right\}$

10) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} 4x+7y &=& 159 \\ 3\frac{1}{3}x &=& \frac{1}{6}z-55 \\ 9z-498 &=& 2x+y \end{array}\right\}$ folgt $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 13\frac{1}{2} \\ y &=& 15 \\ z &=& 60 \end{array}\right\}$

11) Aus

11) Aus $\left\{\begin{array}{r} 2x-y+3z-v+5t=8 \\ -x+y-z+4v-t=6 \\ -3x+4y-z+6v-2t=5 \\ 5x+y+z-2v+3t=4 \\ x-3y+3z-2v+4t=1\frac{1}{2} \end{array}\right\}$ folgt $\left\{\begin{array}{l} x = -\frac{132}{102} \\ y = \frac{21}{102} \\ z = -\frac{672}{102} \\ v = \frac{108}{102} \\ t = \frac{645}{102} \end{array}\right\}$

Zahlenlehre.

Zehntes Kapitel.

Von den Ausdrücken von der Form ax^2+bx+c. Von den Werthen von x, welche sie zu Null machen. Von der Auflösung derjenigen Gleichungen mit mehren Unbekannten, die zu quadratischen Gleichungen mit einem Unbekannten führen.

Erste Abtheilung.

Von der Auflösung der quadratischen Gleichungen und von den allgemeinen (reelen und imaginären) Quadratwurzeln. *)

§. 233. Aufgabe.

Die reine quadratische Gleichung

$$x^2 = a$$

nach x aufzulösen.

*) Die zweite Potenz von einem Ausdruck a, heißt gewöhnlicher sein Quadrat, die 2te Wurzel dagegen die Quadratwurzel, und quadriren heißt so viel als „mit 2 potenziren". Endlich schreibt man gewöhnlich $\sqrt{a}$ statt $\sqrt[2]{a}$, und denkt sich den Wurzel-Exponenten 2 noch hinzu.

Auflösung. Unter der Voraussetzung, daß a eine absolute Zahl, setze man $(\sqrt{a})^2$ statt a, wo $\sqrt{a}$ eine absolute Zahl repräsentirt (§. 160.); und man erhält

$$x^2 = (\sqrt{a})^2$$

oder

$$x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0.$$

Den Ausdruck links zerlege man nach der Formel

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

und man erhält:

$$(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) = 0.$$

Ferner dividire man nun abwechselnd durch $x+\sqrt{a}$ und durch $x-\sqrt{a}$, und erhält

1) $x-\sqrt{a} = 0$ und 2) $x+\sqrt{a} = 0$

und zwar eine jede unter der Voraussetzung, daß die andere nicht statt findet (§. 96.).

Endlich erhält man hieraus:

3) $x = \sqrt{a}$ und 4) $x = -\sqrt{a}$;

so daß also die Gleichung $x^2 = a$ oder $x^2 - a = 0$, zwey Auflösungen hat, d. h. daß es zwey Werthe gibt, einen absoluten (oder positiven) α, und noch einen negativen $-\alpha$, welche statt x gesetzt, die Gleichung $x^2 = a$ oder $x^2 - a = 0$, identisch machen.

§. 234. Zusatz.

Die reine quadratische Gleichung $x^2 = a$, läßt nie mehr als 2 Auflösungen zu, nämlich $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$, und weil, wenn $a = 0$, ist, auch $\sqrt{a} = 0$ seyn muß, also

$$+\sqrt{a} = -\sqrt{a} = +0 = -0 = 0$$

ist, so kann man auch in dem Falle, wo $a = 0$ ist, sagen, daß die quadratische Gleichung zwey Auflösungen zulasse, welche beyde in diesem speziellen Falle bloß einander gleich werden, also in eine einzige zusammenfallen.

Denn es sey α irgend ein Werth von x, welcher $x^2 = a$, d. h. $\alpha^2 = a$, d. h. $\alpha^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$, d. h. $(\alpha+\sqrt{a})(\alpha-\sqrt{a}) = 0$ identisch macht, so ist entweder $\alpha+\sqrt{a} = 0$ d. h. $\alpha = -\sqrt{a}$, oder man kann die identische Gleichung $(\alpha+\sqrt{a})(\alpha-\sqrt{a}) = 0$ durch $\alpha+\sqrt{a}$ wegdivi-

diren, und erhält dann $\alpha - \sqrt{a} = 0$ d. h. $\alpha = +\sqrt{a}$; so daß also α einer der beyden Werthe $+\sqrt{a}$ oder $-\sqrt{a}$ seyn muß.

Anmerkung. Man konnte im (§. 233.) auch aus $x^2 = a$, unter der Voraussetzung, daß a entweder 0 oder eine absolute Zahl ist, auf beyden Seiten die Quadratwurzeln nehmend, sogleich ableiten

$$x = \sqrt{a} = +\sqrt{a},$$

wo $\sqrt{a}$ die absolute Wurzel bedeutet, und wo man dann für x, weil man $\sqrt{(x^2)} = x$, als absolute Wurzel behandelte, auch bloß einen einzigen, nämlich den absoluten Werth $+\sqrt{a}$ erhielt. Allein dann mußte untersucht werden, ob dies die einzige mögliche Auflösung sey. Man mußte sich also zwey Werthe α und β denken, wo jeder, statt x gesetzt, die Gleichung $x^2 = a$ identisch macht, und untersuchen, ob diese beyden Werthe einander gleich seyn müssen, oder von einander verschieden seyn können. So wie aber $\alpha^2 = a$ und $\beta^2 = a$ ist, so erhält man $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, wenn man die beyden Gleichungen von einander subtrahirt; d. h. $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 0$, d. h. $\alpha - \beta = 0$ oder $\alpha + \beta = 0$ d. h. $\beta = \alpha$ oder $\beta = -\alpha$. — Also ist außer α noch ein zweyter (negativer) Werth $-\alpha$ vorhanden, welcher ebenfalls der Gleichung $x^2 = a$ genügt.

§. 235. Erklärung.

Ist a eine negative Zahl, so läßt die Gleichung $x^2 = a$, in frühern Zahlformen (die wir reele Zahlen nannten) gar keine Auflösung zu, weil 0 sowohl als jede positive, und auch jede negative Zahl, mit sich selber multiplizirt, immer Null oder etwas positives gibt, also nie die negative Zahl a geben kann.

Um also eine allgemeine Auflösung der quadratischen Gleichung $x^2 = a$ möglich zu machen, müssen wir, wie dies früher schon einmal bey der Differenz, und später bey dem Quotienten der Fall war, die Form $\sqrt{a}$ in einem viel allgemeinern Sinne nehmen. So wie wir nämlich früher unter $a - b$ und $\frac{a}{b}$ bloße Rechnungsformen uns dachten, bey denen die Bedeutung der einzelnen Buchstaben nicht mehr berücksichtigt wurde, sondern bey welchen bloß die Eigenschaft, daß sie zu b addirt, oder mit b multiplizirt, a geben, das Wesen derselben ausmachte; — eben so wollen wir hier

$\sqrt[2]{a}$ oder $\sqrt{a}$

auch als bloße Rechnungsform auffassen, welcher die Eigenschaft zukommt, daß sie mit 2 potenzirt, a gibt; oder daß sie statt x gesetzt, $x^2 = a$ identisch macht. Dabey ist a ganz allgemein, d. h. die Bedeutung von a nicht weiter berücksichtigt; und diese Quadratwurzel kann man die allgemeine nennen.

Diese allgemeine Quadratwurzel $\sqrt{a}$, ist daher für besondere Werthe von a, entweder einer der frühern, (§. 111.) reel genannten Zahlformen (Rechnungsformen) gleich (wenn a eine absolute Zahl ist); oder sie ist es nicht, sondern eine eigenthümliche neue spezielle Rechnungsform, (wenn a eine negative Zahl ist); und im letztern Fall gehört sie also nach (§. 111.) zu den imaginären Zahlen. So wenig aber die Differenz a—b positiv oder negativ genannt werden kann, so lange sie noch allgemein ist, und so wenig der Quotient $\frac{a}{b}$ eine ganze oder eine gebrochene Zahl heißen darf, so lange a und b noch alle möglichen Bedeutungen bekommen können, mit andern Worten, so lange er allgemein ist; eben so wenig kann man von der Form $\sqrt{a}$ sagen, daß sie reel oder inmaginär sey, so lange a noch jede mögliche Bedeutung haben kann, d. h. so lange $\sqrt{a}$ noch allgemein ist.

§. 236. Zusatz.

So wie aber a eine absolute Zahl ist, gibt es zwey Ausdrücke, nämlich die absolute Zahl α (oder $+\alpha$) und die negative Zahl $-\alpha$, welche diese Eigenschaft, mit 2 potenzirt a zu geben, mit einander gemein haben; und da die allgemeine Quadratwurzel $\sqrt{a}$ Ausdrücke vorstellt, die bloß diese Eigenschaft haben, so ist sie von nun an in diesem Falle zweydeutig, weil man nicht weiß, welcher der Ausdrücke $+\alpha$ oder $-\alpha$, die beyde diese Eigenschaft mit einander gemein haben, gemeint seyn könne. Die zwey Werthe der allgemeinen Quadratwurzel $\sqrt{a}$, für den Fall, daß a eine absolute Zahl ist, kann man auch durch

$+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$

vorstellen, unter $\sqrt{a}$ selbst jedesmal die absolute Wurzel sich denkend, wo dann $+\sqrt{a}$ der positive und $-\sqrt{a}$ der negative Werth ist von der allgemeinen Quadratwurzel $\sqrt{a}$.

§. 237. Zusatz.

Aber eben deswegen muß man schon im Allgemeinen, damit das Allgemeine mit dem, was in einem besondern Falle statt findet, nicht in Widerspruch gerathe, diese allgemeine Quadratwurzel

$$\sqrt{a}$$

(wo a sowohl eine absolute Zahl seyn kann, als auch nicht, d. h. wo man sich nicht mehr um die Bedeutung von a bekümmert), als ein Zeichen ansehen, welches zwey verschiedene Ausdrücke vorstellt, so daß, wenn der eine durch α vorgestellt würde, der zweyte $= -\alpha$ seyn müßte; so also, daß man diese beyden verschiedenen Form-Werthe auch im allgemeinen durch

$$+\sqrt{a} \quad \text{und} \quad -\sqrt{a}$$

vorstellen kann, indem man sich in diesen beyden letztern Ausdrücken, unter $\sqrt{a}$ einen und denselben bestimmten Form-Werth dieser Wurzel denkt.

§. 238. Zusatz.

Weil aber $\sqrt{a}$, dem zu Folge, ein zweydeutiges Zeichen ist, d. h. ein Zeichen, welches, wo es steht, jedesmal einen von zwey verschiedenen Ausdrücken repräsentirt, welches aber den einen derselben eben so gut vorstellen kann, als den zweyten, so muß man sich bey dem Operiren mit solchen Quadrat-Wurzeln wohl vorsehen, und nicht eine solche Form z. B. $\sqrt{a}$, wenn sie in einem Ausdruck, oder in einer Gleichung mehreremale vorkommt, auch als einen und denselben Ausdruck behandeln, bevor man sich nicht vorher überzeugt hat, daß dieselbe $\sqrt{a}$, so oft sie vorkommt, auch jedesmal eine und dieselbe Bedeutnng habe, d. h. auch jedesmal einen und denselben ihrer beyden Form-Werthe repräsentire.

Anmerkung. Dies ist die einzige Vorsicht, die sich unmittelbar aus der Natur dieser Quadrat-Wurzeln ergibt, und welche jede

Schwierigkeit hebt, die bey dem Arbeiten mit solchen Wurzeln in allgemeinen obwalten könnte. Man darf also **nicht unbedingt** setzen

$$2\sqrt{a} \quad \text{statt} \quad \sqrt{a}+\sqrt{a},$$

nicht $(\sqrt{a})^2$ statt $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$,

nicht $(p\pm q)\sqrt{a}$ statt $p\sqrt{a}\pm q\sqrt{a}$,

u. s. w. f.

auch nicht unbedingt aus $\sqrt{a} = \alpha$ und $\sqrt{a} = \beta$ schließen, daß auch $\alpha = \beta$ sey; weil alles dieses voraussetzen würde, daß in jedem dieser Ausdrücke die zweymal vorkommende Form $\sqrt{a}$ jedesmal ein und derselbe Ausdruck sey, was nicht nothwendig der Fall seyn muß, in so ferne recht füglich die erste $\sqrt{a}$ den einen, die zweite $\sqrt{a}$ aber den zweyten ihrer Werthe repräsentiren kann.

§. 239. Zusatz.

Untersucht man aber, ob in Bezug auf diese allgemeinen Quadratwurzeln die Sätze (α, β, γ des §. 150.) noch gelten, so findet man:

α) Es ist noch unbedingt $(\sqrt{a})^2 = a$, welcher der beyden Werthe von $\sqrt{a}$ unter dieser Form auch vorgestellt seyn möge. Dagegen gilt die andere Gleichung

$$\sqrt{(a^2)} = a$$

nur unter der Voraussetzung, daß $\sqrt{(a^2)}$ nicht den Werth $-a$ vorstelle, also daß statt $\sqrt{(a^2)}$ nicht jedweder, sondern nur derjenige Werth gesetzt werde, welcher die Gleichung $\sqrt{(a^2)} = a$ wirklich zur identischen $a = a$ macht.

β) Der Satz: daß Gleiches durch Gleiches radizirt, Gleiches wiedergibt; d. h. der Satz, daß wenn $a = b$ ist, auch $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ seyn müsse, gilt auch nur unter der Voraussetzung, daß wenn statt $\sqrt{a}$ einer der beyden Werthe gesetzt wird, statt $\sqrt{b}$ dann nicht jedweder der beyden Werthe gesetzt werde, sondern nur gerade derselbe, weil nur dann $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ eine (identische) Gleichung seyn kann.

γ) Demnach gilt das (§. 150.) beschriebene Ableiten der Gleichungen, und demnach gelten dann wieder die Formeln der (§. §. 136 und 149.) allemal noch, wenn statt der Wur-

zeln jetzt solche allgemeine Quadratwurzeln gesetzt werden, wenn man nur die Einschränkung beobachtet 1) daß alle vorkommenden Potenzen, Wurzeln und Logarithmen eine Bedeutung bereits bekommen haben, 2) daß unter jeder solchen Form wie $\sqrt{a}$, einer, aber nicht jeder beliebige der beyden Werthe dieser allgemeinern Wurzel verstanden werde.

Namentlich mögen diese letztern Formeln in ihrer jetzigen Gestalt hier noch Platz nehmen.

Es ist nämlich

$$1)\ \sqrt{(ab)} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b},$$
$$2)\ \sqrt{(a:b)} = \sqrt{a}:\sqrt{b},$$
$$3)\ \sqrt{(a^n)} = a^{\frac{n}{2}},$$
$$4)\ \sqrt{(a^n)} = (\sqrt{a})^n,$$
$$5)\ a\sqrt{b} = \sqrt{(a^2\cdot b)},$$
$$6)\ \sqrt{a:b} = \sqrt{(a:b^2)},$$
$$7)\ a:\sqrt{b} = \sqrt{(a^2:b)}.$$

Anmerkung. Man muß aber, um keinen unrichtigen Begriff von der Gültigkeit dieser Formeln aufzufassen, wohl erwägen, was (§. 238.) von diesen Quadrat-Wurzeln gesagt ist. — Hat man daher z. B. die Gleichung

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b},$$

so gibt der Ausdruck rechts, mit 2 potenzirt, erst $(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})^2$, dann $(\sqrt{a})^2\cdot(\sqrt{b})^2$, dann ab; d. h. welchen ihrer beyden Werthe $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ auch vorstellen mögen, so gibt das Produkt

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

doch immer einen Ausdruck, der mit 2 potenzirt, ab gibt; so daß also das Produkt $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ doch nothwendig immer ein Werth der $\sqrt{ab}$ seyn muß. Die Gleichung

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

lehrt daher bloß, daß einer der Werthe von $\sqrt{ab}$ gleich sey, dem Produkte von einem der Werthe von $\sqrt{a}$, mit einem der Werthe von $\sqrt{b}$; dagegen lehrt sie nicht: daß jeder beliebige Werth von $\sqrt{ab}$ gleich sey, dem Produkt aus jedem beliebigen Werthe von $\sqrt{a}$, mit jedem beliebigen Werthe von $\sqrt{b}$.

Dasselbe gilt von den übrigen Gleichungen des vorstehenden Paragraphen.

§. 240. Zusatz.

Nach dieser Erweiterung des Begriffes der Quadratwurzel (des Zeichens $\sqrt{a}$) hat aber die reine quadratische Gleichung

$$x^2 = a \quad \text{oder} \quad x^2 - a = 0$$

im allgemeinen jedesmal zwey Auflösungen, nämlich

$$x = +\sqrt{a} \quad \text{und} \quad x = -\sqrt{a},$$

wo $\sqrt{a}$ in beyden letztern Gleichungen einen und denselben ihrer beyden Werthe repräsentirt, gleichgültig welchen, und wo eine jede dieser Gleichungen nur unter der Voraussetzung gilt, daß die andere nicht mit ihr zugleich statt habe (§. 233.).

§. 241. Aufgabe.

Die quadratische Gleichung

$$1)\ x^2 + ax = b$$

nach ihrem Unbekannten x aufzulösen.

Auflösung. Man suche sie in eine reine quadratische Gleichung zu verwandeln. Statt des Unbekannten x setze man daher lieber $z+h$, so daß die gegebene Gleichung (1.)

in $(z+h)^2 + a(z+h) = b$

d. h. in $2)\ z^2 + (2h+a)z = b - ah - h^2$,

folglich in die reine quadratische

$$3)\ z^2 = b - ah - h^2$$

übergeht, so bald man h so nimmt, daß

$$4)\ 2h + a = 0 \quad \text{oder} \quad h = -\tfrac{1}{2}a$$

wird, wodurch die (3.) in

$$5)\ z^2 = b + \tfrac{1}{4}a^2$$

übergeht, und nach (§. 240.)

$$6)\ z = +\sqrt{b + \tfrac{1}{4}a^2} \quad \text{oder} \quad 7)\ z = -\sqrt{b + \tfrac{1}{4}a^2}$$

also, weil $x = z + h = z - \tfrac{1}{2}a$ ist,

$$8)\ x = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{b + \tfrac{1}{4}a^2} \quad \text{oder} \quad 9)\ x = -\tfrac{1}{2}a - \sqrt{b + \tfrac{1}{4}a^2}$$

gibt, wo $\sqrt{b + \frac{1}{4}a^2}$ jedesmal einen und denselben ihrer beyden Werthe vorstellt, und wo jedes für x gefundene Resultat nur unter der Voraussetzung gilt, daß das andere nicht mit ihm zugleich statt habe.

Diese Werthe von x schreiben sich aber auch noch so, nach (§. 149. Nr. 12.):

10) $x = \frac{-a+\sqrt{4b+a^2}}{2}$ oder 11) $x = \frac{-a-\sqrt{4b+a^2}}{2}$,

immer unter der Voraussetzung, daß jede nur dann statt findet, wenn die andere nicht; und daß die vorkommende $\sqrt{4b+a^2}$ jedesmal einen und denselben, übrigens beliebigen ihrer Werthe repräsentire.

Anmerkung. 1. Beyde von einander verschiedene Werthe, welche durch die Auflösung einer solchen quadratischen Gleichung für den Unbekannten x erhalten werden, pflegt man auch gewöhnlich in die eine folgende Formel zu bringen, nämlich:

$x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{4b+a^2}{4}\right)}$ oder $x = \frac{-a \pm \sqrt{(4b+a^2)}}{2}$,

Anmerkung 2. Hätte man statt der obigen Gleichung

$$x^2+ax = b,$$

diese andere

$$x^2-ax = b$$

gehabt, so würde man auf demselben Wege erhalten haben:

1) $x = \frac{+a+\sqrt{4b+a^2}}{2}$ und 2) $x = \frac{+a-\sqrt{4b+a^2}}{2}$.

so daß also die Gleichungen

$$x^2 \pm ax = b$$

zu Auflösungen geben

1) $x = \frac{\mp a+\sqrt{4b+a^2}}{2}$ und 2) $x = \frac{\mp a-\sqrt{4b+a^2}}{2}$.

§. 242. Zusatz.

Jede quadratische Gleichung

$$1)\ ax^2+bx+c = 0$$

läßt sich auf die Form

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 0$$

bringen, und gibt dann, nach (§. 241.) aufgelöst,

$$2)\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Dabey hat jede quadratische Gleichung jedesmal zwey Auflösungen, den einzigen Fall ausgenommen, wo $b^2-4ac=0$ ist, und wo die beyden Auflösungen in eine einzige zusammen fallen.

Und für den besondern Fall daß a, b, c gegebene reele Ausdrücke sind, müssen diese beyden Werthe von x entweder alle beyde reel seyn, wenn nämlich b^2-4ac positiv ist, oder sie sind alle beyde zugleich imaginär, so oft nämlich b^2-4ac negativ ist. Und sind, in dieser speziellen Voraussetzung, beyde Werthe von x einander gleich, d. h. $b^2-4ac=0$, so ist dieser Werth x allemal reel.

So lange aber a, b, c noch nicht reel, sondern noch allgemein gedacht sind, so lange kann von diesen speziellen Erscheinungen gar nicht die Rede seyn.

§. 243. Zusatz.

Sind aber a, b, c reel, und ist dabey

b^2-4ac negativ z. B. $-q^2$,

unter q die absolute (positive) $\sqrt{4ac-b^2}$ verstanden, so sind die beyden Werthe von x, aus

$$ax^2+bx+c=0,$$

jetzt $$x=\frac{-b\pm\sqrt{-q^2}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{q}{2a}\sqrt{-1}.$$

So oft also die beyden Auflösungen der quadratischen Gleichung

$$ax^2+bx+c=0,$$

deren Koeffizienten alle reel sind, imaginär werden, so läßt sich die eine davon allemal auf die Form

$$P+Q\sqrt{-1}$$

bringen, während die andere dann nothwendig

$$P-Q\sqrt{-1}$$

ist; in beyden Ausdrücken unter P und Q dieselben reelen (positiven oder negativen oder auch Null-) Werthe verstanden. — Diese beyden imaginären Auflösungen einer solchen quadratischen Gleichung können daher nie einander gleich seyn.

Anmerkung. Diese Bemerkung wird in der Folge von ungemeiner Wichtigkeit.

Uebungs-Beyspiele.

1) Aus $x^2 = 8x - 15$ folgt $x = 5$ und $x = 3$.

2) Aus $x^2 - 2x = 15$ folgt $x = 5$ und $x = -3$.

3) Aus $x^2 + 2x = 15$ folgt $x = -5$ und $x = 3$.

4) Aus $x^2 + 8x + 15 = 0$ folgt $x = -5$ und $x = -3$.

5) Aus $3x^2 - 11x = -6$ folgt $x = 3$ und $x = \frac{2}{3}$.

6) Aus $3x^2 + 7x = 6$ folgt $x = -3$ und $x = \frac{2}{3}$.

7) Aus $3x^2 - 7x = 6$ folgt $x = 3$ und $x = -\frac{2}{3}$.

8) Aus $3x^2 + 11x + 6 = 0$ folgt $x = -3$ und $x = -\frac{2}{3}$.

9) Aus $12x^2 = 47x - 40$ folgt $x = 1\frac{1}{4}$ und $x = 2\frac{2}{3}$.

10) Aus $9\frac{1}{3}x^2 - 90\frac{1}{3}x + 195 = 0$ folgt $x = 6\frac{3}{7}$ und $x = 3\frac{1}{4}$.

11) Aus $x^2 - 8x = 14$ folgt $x = 4 + \sqrt{30}$ und $x = 4 - \sqrt{30}$

d. h. $x = 9{,}4772\cdots$ und $x = -1{,}4772\cdots$

12) Aus $118x - 2\frac{1}{2}x^2 = 20$ folgt $x = \frac{118 \pm \sqrt{13724}}{5}$

d. h. $x = 47{,}0298\cdots$ und $x = 0{,}1701\cdots$

13) Aus $6x - 30 = 3x^2$ folgt $x = 1 + \sqrt{-9}$ und $x = 1 - \sqrt{-9}$

oder $x = 1 + 3\sqrt{-1}$ und $x = 1 - 3\sqrt{-1}$.

14) Aus $\frac{31}{6x} = \frac{16}{117 - 2x} + 1$ folgt $x = 67\frac{1}{6}$ und $x = 4\frac{1}{2}$.

15) Aus $\frac{25x + 180}{10x - 81} = \frac{40x}{5x - 8} - \frac{3}{5}$

folgt $x = 14\frac{3}{5}$ und $x = \frac{72}{245}$.

16) Aus $7x - 8x^2 = 34$

folgt $x = \frac{7 + \sqrt{-1039}}{16}$ und $x = \frac{7 - \sqrt{-1039}}{16}$.

17) Aus $\frac{18 + x}{6(3 - x)} = \frac{20x + 9}{19 - 7x} - \frac{65}{4(3 - x)}$

folgt $x = 7\frac{22}{113}$ und $x = 2\frac{1}{2}$.

18) Aus $adx - acx^2 = bcx - bd$ folgt $x = \frac{d}{c}$ und $x = -\frac{b}{a}$.

19) Aus $\frac{a^2x^2}{f^2} - \frac{2ax}{g} + \frac{f^2}{g^2} = 0$ folgt $x = \frac{f^2}{ag}$.

20) Aus $abx^2 - 2x(a+b)\sqrt{ab} = (a-b)^2$

folgt $x = \frac{a+b \pm \sqrt{2a^2+2b^2}}{\sqrt{ab}}$.

21) Aus $ab^3x^2 + (1+c)bd\sqrt{c} + cb^2x^2 = [b^3d\sqrt{c} + (ab+c(1+c)]x$

folgt $x = \frac{bd\sqrt{c}}{ab+c}$ und $x = \frac{1+c}{b^2}$.

22) Aus $a^2x^2 + b^2 = 2abx + cx$

folgt $x = \frac{2ab+c \pm \sqrt{4abc+c^2}}{2a^2}$.

23) Aus $\frac{ax}{b-c} = \frac{a^2}{(b-c)x} - \frac{b-c}{x} + 2\sqrt{a}$

folgt $x = \frac{b-c+a}{\sqrt{a}}$ und $x = \frac{b-c-a}{\sqrt{a}}$.

24) Aus $ax^{2n} + bx^n = c$ d. h. $a(x^n)^2 + b \cdot x^n = c$

folgt $x^n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ *).

25) Aus $x^3 - \frac{p^3}{27x^3} + q = 0$

folgt $x^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ und $x^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$.

26) Aus $x^4 - 74x^2 + 1225 = 0$ d. h. aus $(x^2)^2 - 74 \cdot x^2 + 1225 = 0$

folgt $x^2 = 25$ und $x^2 = 49$,

also $x = \pm 5$ und $x = \pm 7$.

27) Aus $3x^6 + 42x^3 = 3321$ d. h. aus $3(x^3)^2 + 42 \cdot x^3 = 3321$

folgt $x^3 = 27$ und $x^3 = -41$.

28) Aus $2x^8 = 7 - 4x^4$ d. h. aus $2(x^4)^2 + 4 \cdot x^4 = 7$

folgt $x^4 = -1 + \frac{3}{\sqrt{2}}$ und $x^4 = -1 - \frac{3}{\sqrt{2}}$.

---

*) In dieser und in den folgenden Aufgaben ist nicht x der Unbekannte, denn nach x sind diese Gleichungen alle nicht quadratisch; sondern der Unbekannte ist bald x^n, bald x^3, bald x^2, bald x^4, u. s. f.; und diese Gleichungen sind in der That nach diesen letztern Unbekannten x^n, x^3, x^2, x^4, die man jedesmal auch durch einen einzigen Buchstaben z. B. durch z vorstellen könnte, quadratisch und hier nach diesen Unbekannten, aber nicht nach x selbst, aufgelöst.

§. 244. Aufgabe.

Aus den beyden Gleichungen beziehlich der ersten und der zweiten Ordnung:

$$1)\ \alpha y + \beta x + \gamma = 0$$

und

$$2)\ ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

die Werthe der beyden Unbekannten x und y zu finden.

Auflösung und Beweis. Man finde aus (1.) y in x ausgedrückt, nämlich

$$3)\ y = -\frac{\beta x + \gamma}{\alpha}.$$

Dieser Ausdruck statt y gesetzt, macht die erste Gleichung identisch und die 2te übergehen in

$$4)\ \frac{a(\beta x+\gamma)^2}{\alpha^2} - bx \cdot \frac{\beta x+\gamma}{\alpha} + cx^2 - d \cdot \frac{\beta x+\gamma}{\alpha} + ex + f = 0,$$

welche daher noch durch dazugehörige Werthe von x identisch werden muß.

Diese Gleichung (4.) löse man also nach x auf.

Sie gibt, wenn man mit α^2 wegmultiplizirt und $(\beta x+\gamma)^2 = \beta^2 x^2 + 2\beta\gamma x + \gamma^2$ nach (§. 149. Lehrs. 1.) zu Hülfe nimmt, geordnet, folgende:

$$5)\ (a\beta^2 - b\alpha\beta + c\alpha^2) \cdot x^2 + [2a\beta\gamma - b\alpha\gamma - d\alpha\beta + e\alpha^2] \cdot x + (a\gamma^2 - d\alpha\gamma + f\alpha^2) = 0,$$

welche quadratisch ist, nach (§. 242.) vollends aufgelöst werden kann, und für den Unbekannten x zwey Werthe liefert.

Jeden dieser beyden Werthe setze man statt x in (3), so erhält man den zugehörigen Werth von y, also zwey Paare zusammengehöriger Werthe von x und y, welche die beyden gegebenen Gleichungen (1. und 2.) identisch machen.

Anmerkung. Man konnte auch, wie bey den einfachen Gleichungen, jeden für x aus (5.) gefundenen Werth statt x in irgend eine der Gleichungen setzen, z. B. in die (2.); und diese Gleichung nachgehends nach y auflösen. Allein dann hätte man zu jedem Werth von x, zwey

Werthe von y gefunden, weil die Gleichung (2) nach y quadratisch ist; und nur einer davon wäre der wahre gewesen, nämlich derjenige, welcher statt y gesetzt, für denselben Werth von x, auch die erste Gleichung identisch gemacht hätte, weil es gerade die einzige Bedingung der Aufgabe ist, daß nicht eine sondern beyde Gleichungen (1. und 2.) identisch werden sollen. Und da hat man also besser gethan, den aus (5.) gefundenen Werth von x, statt x in die (3.) oder in die (1.) zu setzen, weil man dann sogleich nur einen einzigen, und den wahren Werth von y, dazu erhielt.

§. 245. Zusatz.

Dabey fällt in die Augen, daß die Gleichung (1.) nur durch den einzigen Ausdruck $-\frac{\beta x+\gamma}{\alpha}$ statt y gesetzt, und die Gleichung (5.) nur durch 2 Werthe von x identisch wird, daß es also nicht mehr als die eben gefundenen zwey Paare von Werthen von x und y geben kann, welche beyde Gleichungen (1. und 2.) zugleich identisch machen.

§. 246. Zusatz.

Auch in dieser Aufgabe spielte das Elimininen des Unbekannten y, d. h. das Auffinden der Eliminationsgleichung (4.) die wichtigste Rolle. Man hat sich hier der (§. 233.) beschriebenen Substitutions-Methode bedient. Hätte man die Kombinations-Methode anwenden wollen, so hätte man beyde Gleichungen nach y aufgelöst, und erhalten

aus (1)... $$y = -\frac{\beta x+\gamma}{\alpha}$$

und aus (2.)...

$$y = \frac{-(bx+d)\pm\sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+(d^2-4af)}}{2a};$$

und diese beyden Werthe von y einander gleich gesetzt, geben

$$-\frac{\beta x+\gamma}{\alpha} = \frac{-(bx+d)\pm\sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+(d^2-4af)}}{2a},$$

welches die gesuchte Eliminationsgleichung ist, und welche nun noch geordnet werden muß.

Multiplizirt man aber mit $2a\alpha$ weg, und schafft man die Quadratwurzel ganz allein auf die eine Seite, so erhält man

$$(\alpha b - 2a\beta)x + (\alpha d - 2a\gamma) = \pm\alpha\sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + 2(bd - 2ae)x + (d^2 - 4af)}.$$

Und quadrirt man hier auf beyden Seiten, damit die Wurzel weggeschaft werde, so erhält man

$$(\alpha b - 2a\beta)^2 \cdot x^2 + 2(\alpha b - 2a\beta)(\alpha d - 2a\gamma)x + (\alpha d - 2a\gamma)^2 = \alpha^2(b^2 - 4ac)x^2 + 2\alpha^2(bd - 2ae)x + \alpha^2(d^2 - 4af);$$ *)

und diese Gleichung, wenn man sie ferner nach x ordnet, und zuletzt noch durch 4a wegdividirt, ist keine andere als die Gleichung (4.) des (§. 244.).

§. 247. Zusatz.

Wollte man sich, um y zu elimiriren, der englischen Methode bedienen, so mußte sie einige Abänderungen erleiden, wie in folgendem zu sehen.

Sind nämlich

1) $\alpha y + \beta x + \gamma = 0$,

und $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$,

oder 2) $ay^2 + (bx + d)y + (cx^2 + ex + f) = 0$

die

*) Der Anfänger mag beobachten, daß weil

$$(a + \sqrt{b})^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a^2 + 2a\sqrt{b} + b = a^2 + b + 2a\sqrt{b}$$

ist, aus der Gleichung $cx = b + \sqrt{x}$ das Wurzelzeichen nicht dadurch wegfällt, daß man auf beyden Seiten die Quadrate nimmt, sondern nur dann erst wegfällt, wenn man die gegebene Gleichung so schreibt

$$cx - b = \sqrt{x},$$

daß die Wurzel $\sqrt{x}$ ganz allein auf die eine Seite zu stehen kommt, und dann erst auf beyden Seiten quadrirt.

die beyden Gleichungen, aus denen y eliminirt werden soll, so muß man damit beginnen, daß man zuerst y^2 eliminirt. Zu dem Behufe multiplizire man die (1.) mit ay, die (2.) aber mit α; und subtrahire beyde Resultate von einander; und man erhält

$$3)\ (b\alpha - a\beta)xy + \alpha cx^2 + (d\alpha - a\gamma)y + e\alpha x + f\alpha = 0;$$

oder, wenn man diese Gleichung nach y ordnet:

$$4)\ [(b\alpha - a\beta)x + (d\alpha - a\gamma)] \cdot y + (c\alpha x^2 + e\alpha x + f\alpha) = 0.$$

Nun sind (1. und 4.) Gleichungen, die beyde nach y zu den einfachen gehören, und aus denen dieses y noch eliminirt wird, wenn man die (1.) mit $(b\alpha - a\beta)x + (d\alpha - a\gamma)$, die (4.) dagegen mit α multiplizirt, und diese neuen Gleichungen von einander subtrahirt. Dadurch erhält man aber wieder die Eliminationsgleichung (4.) des (§. 244.).

§. 248. Zusatz.

Auch die französische Eliminations-Methode kann mit einiger Abänderung hier angewandt werden, wo aus den Gleichungen

$$1)\ \alpha y + \beta x + \gamma = 0$$
$$2)\ ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

der Unbekannte y eliminirt werden soll.

Zu dem Ende multiplizire man die Gleichung (1.) mit $\mu y + \nu x + \varrho$, und addire das Resultat zu der Gleichung (2.); und man hat

$$3)\ (a + \mu\alpha)y^2 + (b + \mu\beta + \nu\alpha)xy + (c + \nu\beta)x^2 + (d + \mu\gamma + \varrho\alpha)y + (e + \nu\gamma + \varrho\beta)x + (f + \varrho\gamma) = 0.$$

In dieser Gleichung denkt man sich nun μ, ν, ϱ so bestimmt, daß die Koeffizienten von y^2, von xy, und von y, Null werden. Dann erhält man als Eliminationsgleichung

$$4)\ (c + \nu\beta)x^2 + (e + \nu\gamma + \varrho\beta)x + (f + \varrho\gamma) = 0,$$

unter der Voraussetzung, daß μ, ν und ϱ aus den 3 Gleichungen

$$5)\ a + \alpha\mu = 0$$
$$6)\ b + \beta\mu + \alpha\nu = 0$$
$$7)\ d + \gamma\mu + \alpha\varrho = 0$$

gefunden werden, welche

$$\mu = -\frac{a}{\alpha}, \qquad \nu = \frac{-b+\frac{\beta a}{\alpha}}{\alpha} = \frac{\beta a - \alpha b}{\alpha^2}$$

und $$\varrho = \frac{-d+\frac{a\gamma}{\alpha}}{\alpha} = \frac{a\gamma - d\alpha}{\alpha^2}$$ liefern.

Setzt man aber diese Werthe statt μ, ν, ϱ, in die Gleichung (4.), so erhält man bald die Eliminationsgleichung (4.) des (§. 244.).

Anmerkung. Man könnte auch die (1.), statt sie mit $\mu y + \nu x + \varrho$ zu multipliziren, bloß mit $\mu y + \pi$ multipliziren, zu (2.) addiren, aber in der neuen Gleichung, die mit y (in der ersten Potenz) affizirten Glieder in ein einziges zusammenfassen, und dann bloß die Koeffizienten von y^2 und von y der Null gleich setzen, d. h. μ und π sich so bestimmt denken, oder so bestimmen, daß diese beyden Koeffizienten Null werden. Man hätte aber dann doch π von der Form $\nu x + \varrho$ gefunden, so daß das Ganze vom eben durchgeführten wesentlich nicht sehr bedeutend verschieden gewesen wäre.

Hiehergehörige Beyspiele.

1) Zwey Zahlen x und y so zu finden, daß ihre Summe = s, und ihr Produkt = p wird, d. h. $x+y = s$ und $xy = p$

oder 1) $1 \cdot x + 1 \cdot y - s = 0$

und 2) $0 \cdot y^2 + 1 \cdot xy + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot y + 0 \cdot x - p = 0$

nach x und y aufzulösen. — Man findet $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\sqrt{s^2-4p}$, $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sqrt{s^2-4p}$, wo $\sqrt{s^2-4p}$ jeden ihrer beyden Werthe, aber jedesmal einen und denselben Werth vorstellt.

2) Zwey Zahlen x und y zu finden, deren Differenz = δ, und Summe der Quadrate = s ist; d. h. $x-y = \delta$ und $x^2+y^2 = s$;

oder 1) $-1 \cdot y + 1 \cdot x - \delta = 0$

2) $1 \cdot y^2 + 0 \cdot xy + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot y + 0 \cdot x - s = 0$,

nach x und nach y aufzulösen. — Man findet

$$x = \frac{1}{2}\delta + \sqrt{2s-\delta^2}$$

$$y = -\frac{1}{2}\delta + \sqrt{2s-\delta^2},$$

wo $\sqrt{2s-\delta^2}$ jeden ihrer beyden Werthe, aber immer, so oft sie vorkommt, einen und denselben Werth vorstellt.

3) Die Gleichungen

$$4x-3y=7 \quad \text{und} \quad x^2-y^2=10$$

nach x und nach y aufzulösen. — Man erhält

$x=4+\sqrt{(-\frac{2}{7}7)}$ und $y=3+\frac{4}{3}\sqrt{(-\frac{2}{7}7)}$, wo die $\sqrt{(-\frac{2}{7}7)}$ jeden ihrer beyden Werthe, aber jedesmal einen und denselben Werth vorstellt, so daß die Formen $x=4-\sqrt{(-\frac{2}{7}7)}$ und $y=3-\frac{4}{3}\sqrt{(-\frac{2}{7}7)}$ den beyden gegebenen Gleichungen ebenfalls genügen.

4) Die Gleichungen

$$3x+2y=9 \quad \text{und} \quad 3y^2=4x+5$$

aufzulösen, nach x und nach y. — Man findet

$$x=\frac{89\mp2\sqrt{475}}{27} \quad \text{und} \quad y=\frac{-4\pm\sqrt{475}}{9}.$$

5) Die Gleichung $\frac{x}{y}=q$ und $\alpha x^2+\beta y^2=\gamma$, nach x nnd nach y aufzulösen.

Man findet

$$y=\pm\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha q^2+\beta}} \quad \text{und} \quad x=\pm q\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha q^2+\beta}},$$

wo die vorkommende $\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha q^2+\beta}}$ jedesmal einen und denselben ihrer Werthe vorstellt.

§. 249. Aufgabe.

Es sind gegeben n Gleichungen zwischen n Unbekannten x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots x_n$; darunter die letzte von der zweyten Ordnung, die übrigen zur ersten Ordnung gehörig. Man soll die n Unbekannten finden.

Auflösung 1. Man finde x_1 aus der ersten Gleichung, und setze den Werth dafür in die übrigen n—1 Gleichungen statt x_1. Aus der ersten dieser neuen n—1 Gleichungen finde man x_2 und setze den Werth dafür in die übrigen n—2 Gleichungen. Aus der ersten dieser neuen n—2 Gleichnngen finde man x_3 und setze den Werth dafür in die übrigen n—3 Gleichungen. — So fahre man fort, bis man zuletzt noch zwey Gleichungen hat, zwischen den beyden Unbekannten x_{n-1} und x_n, von denen die letztere noch immer zur zweyten Ordnung gehört, während die erstere noch immer eine einfache Gleichung ist. Findet man hier nun noch aus der erstern x_{n-1}, und setzt den Werth dafür in die

letztere, so erhält man eine Gleichung, die bloß noch den Unbekannten x_n enthält und nach selbigem quadratisch ist. Diese gibt nach (§. 242.) für x_n zwey Werthe, und jeder dieser beyden Werthe liefert, wenn man zu den Ausdrücken für

$$x_{n-1},\ x_{n-2},\ \cdots\ x_3,\ x_2,\ x_1$$

zurückkehrt (welche in Verbindung mit den zuletzt für x_n gefundenen wirklich alle gegebenen Gleichungen identisch machen) einen Werth für jeden der übrigen Unbekannten dazu.

Anmerkung. Man könnte auch aus den ersten n—1 einfachen Gleichungen, die n—1 Unbekannten $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ alle in den letztern x_n ausgedrückt finden, und dann diese Werthe alle auf einmal statt dieser Unbekannten in die letzte der gegebenen Gleichungen substituiren, und man erhielte dann die nach x_n quadratische Endgleichung ohne weiters.

Ueberhaupt kann man in einzelnen Fällen das Verfahren bedeutend abändern, wenn man nur zuletzt seinen Zwek erreicht und namentlich sich überzeugen kann, daß wirklich alle gegebenen Gleichungen identisch sind.

Hiehergehörige Uebungsbeyspiele.

1) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 8 \\ x^2+y^2+z^2 & = & 36 \\ 2x-3y-z & = & 1 \end{array}\right\}$ folgt $\left\{\begin{array}{l} x = 4 \pm \sqrt{\frac{23}{19}} \\ y = \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{\frac{23}{19}} \\ z = \frac{5}{2} \mp \frac{5}{2}\sqrt{\frac{23}{19}} \end{array}\right\}$

2) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} xy+xz+yz & = & 27 \\ x-y & = & 6 \\ y-z & = & 3 \end{array}\right\}$ folgt $\left\{\begin{array}{lll} x = 9 & \text{oder} & 1 \\ y = 3 & \text{oder} & -5 \\ z = 0 & \text{oder} & -8 \end{array}\right\}$

3) Aus $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+v & = & 2a \\ x-y-z+v & = & 2b \\ x-y+z-v & = & 2c \\ x^2+yz+v^2 & = & d \end{array}\right\}$ folgt

$$x = \frac{-a-b+2c}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(-a-b+2c)^2+4[d-(a+b)^2+(a+c)(b+c)]}$$

$$y = \frac{-a-3b}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(-a-b+2c)^2+4[d-(a+b)^2+(a+c)(b+c)]}$$

$$z = \frac{3a+b}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(-a-b+2c)^2+4[d-(a+b)^2+(a+c)(b+c)]}$$

$$v = \frac{3a+3b-2c}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(-a-b+2c)^2+4[d-(a+b)^2+(a+c)(b+c)]}.$$

Zweyte Abtheilung.

Von den Ausdrücken von der Form ax^2+bx+c noch in's Besondere.

---

§. 250. Lehrsatz.

Soll der Ausdruck Az^2+Bz+C für mehr als zwey einander nicht gleiche Werthe von z identisch 0 seyn, so muß $A = B = C = 0$, und Az^2+Bz+C dann für jeden Werth von z identisch $= 0$ werden.

Beweis. Denn wäre nicht $A = 0$, so wäre die Gleichung

$$Az^2+Bz+C = 0$$

nach z eine quadratische, welche nach (§. 242.) nie durch mehr als zwey Werthe von z identisch werden kann.

Also muß $A = 0$ seyn. — Wäre aber dann nicht zugleich $B = 0$, so wäre die Gleichung $Az^2+Bz+C = 0$, jetzt nach z eine einfache, also nur durch einen einzigen Werth von z identisch zu machen. Also muß auch $B = 0$ seyn, dann auch $C = 0$.

§. 251. Zusatz.

Ist der Ausdruck Az^2+Bz+C für mehr als zwey einander ungleiche Werthe von z, dem andern Ausdruck

$$A_1z^2+B_1z+C_1$$

gleich, so muß $A = A_1$ und $B = B_1$ und $C = C_1$ seyn; und alsdann Ausdrücke Az^2+Bz+C und $A_1z^2+B_1z+C_1$ sind dann für jeden Werth von z identisch.

Denn da die Gleichung

$$Az^2+Bz+C = A_1z^2+B_1z+C$$

jetzt

$$(A-A_1)z^2+(B-B_1)z+(C-C_1) = 0$$

übergeht, so folgt aus (§. 250.), daß $A-A_1 = 0$, $B-B_1 = 0$ und $C-C_1 = 0$ seyn muß, d. h. es folgt alles Behauptete unmittelbar.

§. 252. Lehrsatz.

Ist α ein Werth von z, welcher z^2+Az+B zu Null macht, so läßt sich z^2+Az+B allemal in zwey Faktoren zerlegen, von denen der eine $z-\alpha$, der andere dagegen die Form $z-\beta$ hat.

Beweis. Denn da nach der Voraussetzung $\alpha^2+A\alpha+B=0$ ist, so ist, wenn man dies von z^2+Az+B subtrahirt:

$$z^2+Az+B = (z^2-\alpha^2)+A(z-\alpha),$$

also auch $$= (z-\alpha)(z+\alpha+A) = (z-\alpha)(z-\beta),$$

wenn $-(\alpha+A)$ durch β vorgestellt wird.

§. 253. Aufgabe.

Den Ausdruck z^2+Az+B in zwey Faktoren von der Form $z-\alpha$ und $z-\beta$, wo α und β von z unabhängig seyn sollen, zu zerlegen.

Auflösung I. Es ist nach (§. 107.):

$$(z-\alpha)(z-\beta) = z^2-(\alpha+\beta)z+\alpha\beta;$$

und weil dieser Ausdruck für jeden Werth von z mit dem gegebenen z^2+Az+B identisch werden soll, so muß identisch seyn

$$1)\ \alpha+\beta = -A$$

und $$2)\ \alpha\cdot\beta = B,$$

welche beyden Gleichungen, nach α und β, dem (§. 244.) gemäß, aufgelöst:

$$3)\ \alpha = -\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}$$

und $$4)\ \beta = -\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}$$

geben, so daß man hat

$$z^2+Az+B$$

$$= (z-[-\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}])\cdot(z-[-\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}])$$

$$=(z+[\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}])\cdot(z+[\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}]).$$

Und weil man für α und β zwey Paare zusammengehöriger Werthe hat, welche den Gleichungen (1. und 2.) genügen, so scheint es, als wenn der Aufgabe auf zwey verschiedene Arten genügt werden könnte. Allein die beyden Werthe von α und β geben, wie die bloße Ansicht lehrt, doch immer dieselben Faktoren, nur mit einander vertauscht.

Es läßt sich also der Ausdruck z^2+Az+B nur auf eine einzige Art in 2 Faktoren von der Form $z-\alpha$ und $z-\beta$ zerlegen.

Und diese beyden Faktoren sind reel und einander nicht gleich, wenn $A^2 > 4B$; sie sind reel und einander gleich, wenn $A^2 = 4B$; endlich sind sie imaginär, wenn $A^2 < 4B$ und wenn in allen 3 Fällen A und B reele Zahlen sind.

Auflösung II. Weil der Ausdruck $z^2 + Az + B$ die Form $(z-\alpha)(z-\beta)$ annehmen soll, so sind α und β die beyden Werthe von z, welche ihn zu Null machen. Um also α und β zu haben, suche man nur die beyden Werthe von z, welche die Gleichung

$$z^2 + Az + B = 0$$

identisch machen.

§. 254. Zusatz.

Zu gleicher Zeit erhellet, daß wenn α und β die beyden Werthe von z sind, welche $z^2 + Az + B = 0$ identisch machen, dann allemal $(z-\alpha)(z-\beta) = z^2 + Az + B$, also auch

$$A = -(\alpha+\beta)$$

und

$$B = +\alpha\cdot\beta$$

seyn werde.

Werden also ein andermal Werthe gesucht von α und β, welche den beyden Gleichungen $\alpha+\beta = u$ und $\alpha\beta = v$ genügen, so darf man nur die beyden Werthe von z suchen, welche

$$z^2 - uz + v = 0$$

identisch machen; der eine ist α, der andere β.

§. 255. Zusatz.

Weil $px^2 + qx + r = p\left(x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{r}{p}\right)$ geschrieben werden kann, so ist auch, in so ferne $x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{r}{p}$ in zwey Faktoren von der Form $(x+\alpha)(x+\beta)$ zerlegt wird:

1) $px^2 + qx + r$

$$= p\left(x + \frac{q+\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right)\left(x + \frac{q-\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right),$$

wo p selber noch in $\sqrt{p}\cdot\sqrt{p}$ oder in $\mu\cdot\frac{p}{\mu}$ zerlegt, und jeder

dieser Faktoren den übrigen zugelegt werden kann, so daß man erhält:

2) px^2+qx+r

$$= \left(\mu x+\mu\cdot\frac{q+\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right)\left(\frac{p}{\mu}x+\frac{p}{\mu}\cdot\frac{q-\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right),$$

auch

$$= \left(\sqrt{p}\cdot x+\frac{q+\sqrt{q^2-4pr}}{2\sqrt{p}}\right)\cdot\left(\sqrt{p}\cdot x+\frac{q-\sqrt{q^2-4pr}}{2\sqrt{p}}\right),$$

wo jede Wurzel, so oft sie vorkommt, einen und denselben ihrer Werthe vorstellt.

Anmerkung. Man konnte auch direkt verlangen, px^2+qx+r in ein Produkt von der Form $(\mu x+\alpha)(\nu x+\beta)$ zu verwandeln. — Weil aber

$$(\mu x+\alpha)(\nu x+\beta) = \mu\nu x^2+(\mu\beta+\nu\alpha)x+\alpha\beta$$

mit px^2+qx+r für jeden Werth von x identisch werden soll, so muß man identisch machen

$$1)\ \mu\nu = p,$$
$$2)\ \mu\beta+\nu\alpha = q,$$
$$3)\ \alpha\beta = r,$$

woraus, je nachdem man noch die 4te Bedingung hinzufügt, daß $\mu=\nu$ werden soll, oder diese 4te Bedingung weglaßt, so daß μ ganz stimmt und willkürlich bleibt, die beyden obigen Zerlegungen geben.

§. 256. Aufgabe.

Man soll einen Ausdruck von der Form $x+\alpha$ finden, welcher mit der Quadratwurzel

$$\sqrt{x^2+Ax+B}$$

identisch ist.

Auflösung. Weil

$$1)\ \sqrt{x^2+Ax+B} = x+\alpha$$

werden soll, so muß

$$2)\ x^2+Ax+B = (x+\alpha)^2 = x^2+2\alpha x+\alpha^2$$

werden; also nach (§. 251.):

$$3)\ 2\alpha = A \quad \text{und} \quad 4)\ \alpha^2 = B,$$

welche beyde letztern Gleichungen identisch seyn müssen. Die (3.) wird durch

$$5)\ \alpha = \tfrac{1}{2}A$$

identisch; und setzt man diesen Werth in die (4.) statt α, so bekommt man

$$6)\ \tfrac{1}{4}A^2 = B \quad \text{oder} \quad A^2 - 4B = 0,$$

welche identisch seyn muß. — Sind also A und B so gegeben, daß die Gleichung (6.) identisch ist, so ist die Aufgabe möglich, und es ist $\sqrt{x^2+Ax+B} = x+\tfrac{1}{2}A$.

Ist aber nicht $A^2-4B = 0$ gegeben, so existirt kein Ausdruck von der Form $x+\alpha$, welcher mit 2 potenzirt, für jeden Werth von x, x^2+Ax+B geben könnte. (Vgl. §. 253.)

§. 257. Zusatz.

Weil man schreiben kann

$$px^2+qx+r = p\left(x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}\right),$$

so ist:

$$\sqrt{px^2+qx+r} = \sqrt{p}\left(x+\tfrac{1}{2}\frac{q}{p}\right) = \sqrt{p}\cdot x+\frac{q}{2\sqrt{p}},$$

so oft $\left(\frac{q}{p}\right)^2-4\frac{r}{p} = 0$, d. h. $q^2-4pr = 0$ ist. Und ist q^2-4pr nicht $= 0$, so existirt kein Ausdruck von der Form $\beta x+\alpha$, welcher für jeden Werth von x, mit 2 potenzirt d. h. quadrirt, den gegebenen Ausdruck px^2+qx+r hervorbringen könnte.

§. 258. Aufgabe.

In dem Falle aber, wo kein Ausdruck von der Form x existirt, so daß $(x+\alpha)^2 = x^2+Ax+B$ werden könnte, kann man doch einen Ausdruck von der Form

$$(x+\alpha)^2+\beta$$

suchen, welcher mit dem gegebenen Ausdruck

$$x^2+Ax+B$$

identisch wird, für jeden Werth von x.

Auflösung. Da jetzt:

$$1)\ x^2+2\alpha x+(\alpha^2+\beta) = x^2+Ax+B$$

werden soll, so muß man jetzt

$$2)\ 2\alpha = A \quad \text{und} \quad 3)\ \alpha^2+\beta = B,$$

also $3)\ \alpha = \frac{1}{2}A$ und $4)\ \beta = B-\frac{1}{4}A^2$

machen; so daß man hat:

$$x^2+Ax+B = (x+\tfrac{1}{2}A)^2+(B-\tfrac{1}{4}A^2).$$

§. 259. Zusatz.

Weil

$$px^2+qx+r = p\left(x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}\right)$$

ist, so findet man gerade so:

$$px^2+qx+r = p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2+\frac{4pr-q^2}{4p^2}.$$

Anmerkung. Und weil $x+\frac{q}{2p} = z$ oder $x = z-\frac{q}{2p}$ gesetzt werden kann, so hat man dadurch den Ausdruck von der Form px^2+qx+r auf einen andern von der Form $pz^2+\gamma$ reduzirt. Dies konnte auch, wie (§. 241.) zu sehen ist, direkt geschehen, indem man in dem gegebenen Ausdruck

$$1)\ px^2+qx+r,$$

$x = z+h$ setzte, ihn dadurch in

$$2)\ pz^2+(2ph+q)z+(ph^2+qh+r)$$

übergehen machte, und nun h so bestimmt, daß $2ph+q = 0$ wird.

§. 260. Zusatz.

Sind nun p und q und r reele Ausdrücke, so ist für jeden reelen Werth von x, $\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2$ nothwendig positiv oder Null.

Sind also

p und $4pr-q^2$

zugleich positiv, so ist px^2+qx+r für jeden reelen Werth von x, allemal positiv, nie Null und nie negativ. — Und umgekehrt, soll px^2+qx+r für jeden reelen Werth von x, allemal positiv werden, so muß p und $4pr-q^2$ zugleich positiv seyn.

Denn wäre p negativ, so würde man $x+\frac{q}{2p}$ so groß genommen sich denken können, daß ohne Rücksicht auf das (+ oder −) Zeichen, $p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2 > \frac{4pr-q^2}{4p}$, also nothwendig $p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2+\frac{4pr-q^2}{4p}$ negativ werden würde, für alle diese Werthe von x.

Da endlich für $x=-\frac{q}{2p}$ der ganze Ausdruck px^2+qx+r sich bloß auf $\frac{4pr-q^2}{4p}$ reduzirt, und p nicht 0 und nicht negativ ist, so muß $4pr-q^2$ Null oder ebenfalls positiv seyn, je nachdem px^2+qx+r auch für diesen Werth von x Null oder positiv werden soll.

§. 261. Zusatz.

Aus denselben Gründen müssen

$$p \text{ und } \frac{4pr-q^2}{4p}$$

zu gleicher Zeit negativ, also p negativ und zugleich wiederum $4pr-q^2$ positiv seyn, wenn px^2+qx+r für jeden reelen Werth von x allemal negativ, nie Null und nie positiv werden soll.

Anmerkung 1. Da

$$x=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-4pr}}{2p}$$

die Werthe von x sind, welche px^2+qx+r zu Null machen, und weil diesen Ausdruck px^2+qx+r, kein reeler Werth zu Null machen kann, so oft er für alle reelen Werthe von x immer fort positiv oder immer fort negativ werden soll, so folgt von selbst, daß q^2-4pr negativ, also $4pr-q^2$ positiv seyn muß, sowohl dann, wenn px^2+qx+r für alle reelen Werthe von x durchaus immer positiv, als auch dann, wenn er durchaus immer negativ werden soll.

Anmerkuug 2. Diese Bemerkungen der vorhergehenden (§. §. 260. und 261.) veranlassen uns aber, den Gang der Werthe von px^2+qx+r, für den Fall, daß statt x nach und nach alle reelen Werthe gesetzt

würden, noch näher zu untersuchen. Und zu dem Ende stellen wir nachstehende überaus wichtige Betrachtungen an.

§. 262. Erklärung.

Man kann die Reihe der ganzen Zahlen von der **1** ab ohne Aufhören wachsend, zwischen je zwey auf einander folgenden ganzen Zahlen p und $p+1$ aber wiederum eine beliebig zu vermehrende Menge gebrochener Zahlen sich denken, z. B.

$$p+\frac{1}{n},\ p+\frac{2}{n},\ p+\frac{3}{n},\ p+\frac{4}{n},\ \cdots\cdots\ p+\frac{n-1}{n},$$

wo n beliebig groß und größer und ohne Aufhören größer werden kann; so daß man sich von der **0** ab, eine ohne Aufhören fort größer werdende Reihe gebrochener und ganzer Zahlen denken kann, die zuletzt jede noch so groß gegebene Zahl erreicht und übersteigt, während der Unterschied zwischen je zwey auf einander folgenden, $= \frac{1}{n}$ ist, also kleiner gedacht werden kann, als jede noch so klein gegebene Zahl, weil n selbst ohne Aufhören fort größer genommen werden darf. — Je zwey in dieser Reihe der Zahlen befindliche, nennen wir nun *stetig* neben einander liegend, wenn man sich diesen Unterschied $\frac{1}{n}$ ohne Aufhören fort der Null näher gerückt denkt, oder mit andern Worten, wenn man diesen Unterschied $\frac{1}{n}$ und **0** so nahe an einander gerückt denkt, daß keine Zahl mehr dazwischen liegen kann, die größer noch als **0** aber kleiner als $\frac{1}{n}$ wäre. Von diesem Unterschiede $\frac{1}{n}$ sagen wir dann, „er sey im *Moment des Verschwindens*."

Wenn wir ferner in der Folge sagen werden „der Werth eines x sey unendlich groß gedacht", so verstehen wir unter, daß für x *irgend eine* der Zahlen gesetzt werden, welche größer ist, als eine beliebig gegebene, noch so gro-

ße Zahl, und wir drücken dies auch wohl dadurch aus, daß wir $x = \infty$ schreiben. *)

Ferner kann man der, zwischen 0 und ∞ liegenden stetig wachsenden Reihe der Zahlen, das (+) Zeichen oder das (—) Zeichen vorsetzen, und erhält dadurch die Reihe aller positiven Zahlen von 0 bis $+\infty$, und die Reihe aller negativen Zahlen von 0 bis $-\infty$; die erstere wachsend, die andere abnehmend, weil die negative Zahl nach (§. 112.) desto kleiner ist, je größer ihr absolutes Glied wird. Die Reihe der stetig auf einander folgenden Zahlen von $+\infty$ an, durch 0 hindurch, bis zu $-\infty$, ist also fortwährend im Abnehmen begriffen und enthält alle reellen Zahlen (§. 111.).

Will man endlich bey der Vergleichung der reelen Zahlen nicht darauf sehen, ob sie positiv oder negativ sind, sondern nur, ob ihr absolutes Glied (z. B. von $+3$, die Zahl 3, von $-\frac{5}{2}$, die Zahl $\frac{5}{2}$) größer oder kleiner ist, als das absolute Glied irgend einer andern gegebenen reelen Zahl, so fügt man die Worte hinzu „abgesehen vom (+ oder —) Zeichen" oder die Worte „absolut genommen"; und um zu schreiben, daß von den beyden reelen, positiven oder negativen Zahlen a und b, absolut genommen a größer als b sey, schreiben wir in der Folge immer

$$\pm a > \pm b,$$

---

*) Eigentlich unendlich große Zahlen können nie in Rechnung kommen, sondern nur recht große, ja beliebig große Zahlen, aber doch immer bestimmte uud auch angebbare; und namentlich kann vergleichungsweise von Zahlen die Rede seyn, welche größer noch sind als andere, die bereits beliebig groß gedacht worden. Und in diesem Sinne ist also obiges Zeichen ∞ nur zu nehmen. Eben so aber kann auch eigentlich nie eine Zahl wirklich in Rechnung kommen, die im Moment des Verschwindens ist, sondern nur eine sehr kleine der Null beliebig nahe rückende Zahl; und namentlich kann vergleichungsweise von Zahlen die Rede seyn, die immer noch kleiner sind, als jede noch so klein gegebene oder noch so klein gedachte; also von Zahlen, welche durch $\frac{1}{\infty}$ vorgestellt werden können, wenn ∞ in dem eben besprochenen Sinne gedacht wird.

indem wir die (—) Zeichen gelten lassen, wenn a oder b negativ ist (weil dann —a oder —b die absoluten Glieder vorstellen), die (+) Zeichen dagegen, wenn a oder b positiv sind (weil dann +a oder +b wiederum den absoluten Gliedern gleich kommen).

So ist z. B. nach (§. 112.) —2 größer als —5, aber abgesehen vom Zeichen, ist —2 kleiner als —5,

d. h. $\pm(-2)<\pm(-5)$, nämlich $-(-2)<-(-5)$, oder $2<5$.

Ferner ist $+\frac{3}{2}>-\frac{5}{3}$, aber $\pm(+\frac{3}{2})<\pm(-\frac{5}{3})$,

d. h. $+(+\frac{3}{2})<-(-\frac{5}{3})$ d. h. $\frac{3}{2}<\frac{5}{3}$. —

Endlich ist

$+3>-\frac{4}{5}$ und auch $\pm(+3)>\pm(-\frac{4}{5})$,

d. h. $+(+3)>-(-\frac{4}{5})$, nämlich $3>\frac{4}{5}$.

§. 263. Lehrsätze.

I. Der Ausdruck $x+p$, wenn p eine beliebig reele Zahl ist, wird $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem für x selbst $+\infty$ oder $-\infty$ gesetzt wird.

II. Der Ausdruck $x+p$ ändert sich mit x zugleich stetig und durchläuft alle stetig neben einander liegenden Werthe von $+\infty$ bis zu $-\infty$, wenn x selbst nach und nach alle reelen Werthe von $+\infty$ durch 0 hindurch bis zu $-\infty$ annimmt.

III. Dasselbe ist mit $ax+b$ der Fall, wenn a positiv und b beliebig reel ist; ist dagegen a negativ, so ändern sich zwar die Werthe von $ax+b$ noch stetig, mit den stetig sich ändernden Werthen von x zugleich, aber sie wachsen von dem kleinsten Werth $-\infty$ anfangend bis zu $+\infty$ hin, zu derselben Zeit, wo die Werthe von x, von $+\infty$ bis zu $-\infty$ stetig abnehmen.

IV. Unter den reelen Werthen von x befindet sich also allemal einer, aber offenbar nur ein einziger, welcher $ax+b$ zu Null macht. *)

---

*) Man erkennt leicht, daß (§. 262.) eigentlich in das 3te Kapitel und (§. 263.) in das nächstvorhergehende neunte Kapitel gehört. Es sind aber beyde Sätze absichtlich bis hieher verspart worden, weil sie hier zugleich mit ihren wichtigsten Anwendungen und analogen Sätzen zusammengestellt werden konnten, wodurch die Uebersicht des zu leistenden erleichtert wird.

Beweise. 1) Da $x+p$ nur um das gegebene positive oder negative p, absolut genommen, größer oder kleiner ist als x, so fällt von selbst in die Augen, daß $x+p$ mit x zugleich positiv und negativ ohne Ende, abgesehen vom Zeichen, fortwachsen kann, was der Lehrsatz (1.) bloß behauptet hat.

2) Ist h positiv aber im Moment des Verschwindens gedacht, so stellen

$$\alpha+h, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \alpha-h$$

beliebige drey auf einander folgende der stetig abnehmenden Werthe von x vor. Die 3 zugehörigen Werthe von $x+p$ sind nun

$$(\alpha+p)+h, \quad (\alpha+p) \quad \text{und} \quad (\alpha+p)-h,$$

also noch immer stetig neben einander liegend und abnehmend, und es müssen daher alle Werthe von $x+p$ von $+\infty$ bis zu $-\infty$ immerfort stetig abnehmen.

3) Da $ax+b = a\left(x+\frac{b}{a}\right) = a(x+p)$ ist, wenn $\frac{b}{a}$ durch p vorgestellt wird, so ist $a(x+p)$ mit $x+p$ zugleich positiv oder negativ, wenn a positiv ist. Ist dagegen a negativ, so ist $a(x+p)$ negativ, so oft $x+p$ positiv, und positiv, so oft $x+p$ negativ wird. — Die 3 zu

$$\alpha+h, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \alpha-h$$

gehörigen Werthe von $ax+b$ sind nun

$$a(\alpha+p)+ah, \quad a(\alpha+p) \quad \text{und} \quad a(\alpha+p)-ah,$$

d. h. $$(a\alpha+b)+ah, \quad a\alpha+b \quad \text{und} \quad (a\alpha+b)-ah;$$

und da der Unterschied zwischen je zweyen $= ah$ ist, so ist dieser mit h zugleich im Moment des Verschwindens. Denn gesetzt es wäre ah nicht noch kleiner zu denken als irgend eine noch so kleine Zahl δ, sondern

$$\pm(ah) \gtreqless \pm\delta, \text{ *)}$$

so wäre auch

$$\pm h \gtreqless \pm\frac{\delta}{a},$$

während doch h kleiner noch seyn muß, als jede noch so klein gedachte Zahl, also auch kleiner noch als $\pm\frac{\delta}{a}$. —

Also erhellet auch der Lehrsatz (3.) und mit ihm der letzte (4.) ebenfalls.

---

*) Die Zeichen $\pm ah$, $\pm\delta$ bedeuten hier, dem (§. 262.) zu Folge allemal absolute Zahlen, nie negative.

§. 264. Lehrsätze.

I. Der Ausdruck x^2+px+q, wenn p und q beliebig reel sind, wird allemal $=+\infty$, man mag $x=+\infty$ oder $x=-\infty$ nehmen.

II. Die Werthe von x^2+px+q ändern sich stetig mit den sich stetig von $+\infty$ bis $-\infty$ sich ändernden und abnehmenden Werthen von x zugleich, nehmen aber eine Zeitlang von $+\infty$ bis zu $q-\frac{1}{4}p^2$, also bis zu $+z$, oder bis zu 0, oder bis zu $-z$ ab (unter z eine absolute Zahl gedacht), je nachdem $p^2<4q$, oder $p^2=4q$, oder $p^2>4q$ ist; und wachsen dann von da ab wieder fortwährend bis zu $+\infty$. Der Werth $(+z)$, oder 0, oder $(-z)$, welcher einen Scheidepunkt bildet in der Reihe der Werthe von x^2+px+q, heißt der Kleinste oder ein Minimum.

III. Ist dieser Kleinste der Werthe von x^2+px+q, nämlich $q-\frac{1}{4}p^2$, positiv, d. h. ist $p^2<4q$ oder $\frac{1}{4}p^2<q$, so ist keiner dieser Werthe $= 0$, und keiner der reelen Werthe von x macht also dann x^2+px+q zu Null. Die beyden Werthe von x, welche die Gleichung

$$x^2+px+q=0$$

identisch machen, sind also dann beyde imaginär.

IV. Ist dieser kleinste der Werthe von x^2+px+q, der Null gleich, ist also $p^2=4q$ oder $\frac{1}{4}p^2=q$, so ist es einer der reelen Werthe von x, welcher $x^2+px+q=0$ identisch macht, aber auch nur ein einziger.

V. Ist aber dieser Kleinste der Werthe von x^2+px+q negativ, d. h. ist $p^2>4q$ oder $\frac{1}{4}p^2>q$, so gehen die Werthe von x^2+px+q, von $+\infty$ durch 0 zu $-z$ stetig fort, und von $-z$ an stetig zu $+\infty$ zurück, also noch einmal durch 0 hindurch.

Zwey von allen reelen Werthen von x sind es also dann, welche der Gleichung

$$x^2+px+q=0$$

genügen.

VI. Da

ax^2+bx+c allemal $= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$, also auch

$=a(x^2+px+q)$ werden kann, so gilt alles vorstehende auch von ax^2+bx+c, so lange a positiv ist; ist dagegen a negativ, so fangen die Werthe von ax^2+bx+c von $-\infty$ an, wachsen bis zu einem größten Werth (ein Maximum oder ein Größtes genannt), nämlich bis zu $\frac{4ac-b^2}{a}$ hin, um von da an wieder abzunehmen bis zu $-\infty$ hin.

Beweis. Es ist $x^2+px+q = (x+p)x+q$. Da nun x und $x+q$ beyde zugleich $+\infty$ oder beyde zugleich $-\infty$ werden, je nachdem man $x=+\infty$ oder $x=-\infty$ nimmt, nach (§. 263.) so wird $(x+p)x$ offenbar $+\infty$, und dann auch $(x+p)x+q$ nothwendig $+\infty$, man mag $x=+\infty$ oder $x=-\infty$ nehmen. Dadurch ist (I.) außer Zweifel gesetzt. — Ist nun h positiv aber im Moment des Verschwindens gedacht, so sind

$$\alpha+h, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \alpha-h$$

3 der stetig nebeneinander liegenden und abnehmenden Werthe von x; und wenn, der Kürze wegen, der Ausdruck x^2+px+q durch f_x bezeichnet wird, so daß

$$f_{\alpha+h}, \quad f_\alpha \quad \text{und} \quad f_{\alpha-h}$$

die 3, zu den eben gedachten Werthen von x, gehörigen Werthe von f_x sind, so hat man

$$f_{\alpha\pm h} = (\alpha\pm h)^2+p(\alpha\pm h)+q$$
$$= (\alpha^2+p\alpha+q)\pm(2\alpha+p)h+h^2.$$

Demnach sind die Unterschiede je zweier dieser auf einander folgenden Werthe von f_x,

$$1)\ f_{\alpha+h}-f_\alpha = (2\alpha+p)h+h^2 = (2\alpha+p+h)h,$$
$$2)\ f_\alpha-f_{\alpha-h} = (2\alpha+p)h-h^2 = (2\alpha+p-h)h;$$

d. h. diese Unterschiede sind mit h zugleich im Moment des Verschwindens. Könnte nämlich einer dieser Unterschiede $(2\alpha+p+h)h$ nicht mehr kleiner werden, als eine noch so klein gedachte, aber bestimmte Zahl δ, so also daß höchstens

$$\pm(2\alpha+p\pm h)\cdot h \gtreqless \pm\delta \ *)$$

*) Es bedeutet hier $\pm z$, dem (§. 262.) zu Folge, allemal eine absolute, und nie eine negative Zahl.

werden könnte, so hätte man

$$h \gtrless \pm \frac{\delta}{2\alpha+p\pm h}, \text{ also } h > \pm \frac{\delta}{2\alpha+p+1},$$

weil ein Bruch desto kleiner wird, je größer sein Nenner ist; also wäre dann h nicht im Moment des Verschwindens gedacht, was gegen die Voraussetzung ist. Es ändern sich also die Werthe von f_x mit denen von x zugleich stetig.

So lange nun die Unterschiede (1. und 2.) beyde positiv sind, so lange nehmen offenbar die Werthe von f_x mit denen von x zugleich ab. So lange dagegen diese Unterschiede (1. 2.) negativ sind, so lange wachsen die Werthe von f_x, wenn die Werthe von x abnehmen. Und wenn endlich von diesen Unterschieden der eine positiv, der andere dagegen negativ ist, so bildet der Werth f_α von f_x einen Scheidepunkt, in so ferne dann die zu den nächstgrößern und nächstkleinern Werthen $\alpha+h$ und $\alpha-h$ von x, gehörigen Werthe von f_x, alle beyde größer oder alle beyde kleiner sind, als der zu $x = \alpha$ gehörige. Nun sind aber diese Unterschiede (1. 2.) offenbar beyde positiv, wenn $2\alpha+p$ positiv ist, und beyde negativ, wenn $2\alpha+p$ negativ gefunden wird; in so ferne, wie klein auch $2\alpha+p$ gedacht werden mag, h doch immer noch kleiner gedacht worden ist, in so ferne also $2\alpha+p\pm h$, im erstern Falle doch immer positiv, im andern dagegen allemal negativ ist. — Und nur wenn

$$2\alpha+p = 0, \text{ also}$$

$$3)\ \alpha = -\tfrac{1}{2}p \qquad \text{wird,}$$

ist der erste jener Unterschiede, $f_{\alpha+h}-f_\alpha$ nämlich, $= +h^2$ also positiv, der andere $f_\alpha - f_{\alpha-h}$ dagegen $= -h^2$, also negativ; so daß also f_α jetzt, wo $f_{(-\frac{1}{2}p)}$ daraus geworden, kleiner ist, als $f_{\alpha+h}$ und zugleich kleiner als $f_{\alpha-h}$, also ein Minimum (ein Kleinstes) ist.

Dieses Minimum, d. h. dieser kleinste Werth von f_x ist aber

$$= (\tfrac{1}{2}p)^2 - p(\tfrac{1}{2}p) + q \quad \text{d. h.} = q - \tfrac{1}{4}p^2,$$

so daß also f_x von $+\infty$ bis zu $q-\frac{1}{4}p^2$ abnimmt, und von da ab wieder zu $+\infty$ stetig zurückkehrt, alle zwischenliegenden Werthe durchlaufend, während dem x alle reelen Werthe, von $+\infty$ anfangend und bey $-\infty$ aufhörend, gegeben werden. Ist demnach $q-\frac{1}{4}p^2$ positiv, so ist keiner der Werthe von f_x, 0 oder negativ. Ist $q-\frac{1}{4}p^2 = 0$, so ist doch keiner der Werthe von f_x negativ. Ist aber $q-\frac{1}{4}p^2$ negativ, so gehen die Werthe von f_x von $+\infty$ an, durch Null hindurch, stetig bis zu diesem negativen und kleinsten Werthe $q-\frac{1}{4}p^2$ fort, und von da ab wieder stetig, also durch 0 noch einmal hindurch, zu $+\infty$ zurück. Und dadurch sind die Behauptungen (II.—V.) erwiesen.

Anmerkung 1. Wir haben (§. 242.)

aus $$x^2+px+q = 0,$$

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$$

gefunden, welche beyden Werthe von x reel seyn mögen, in so ferne wir $\frac{1}{4}p^2-q$ positiv annehmen wollen. Ist nun q positiv, so ist

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q} < \pm\tfrac{1}{2}p$$

also offenbar beyde Werthe von x negativ, wenn p positiv; dagegen beyde Werthe von x positiv, wenn p negativ ist. — Ist aber q negativ, so ist $\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q} > \pm\frac{1}{2}p$; folglich ist dann allemal einer der Werthe von x positiv und der andere negativ, mag p übrigens positiv oder negativ oder Null seyn.

Anmerkung 2. Es ist sehr interessant, aus dem Gange der Werthe von f_x, auch früher bereits als wahr erkannte Sätze hier auf's neue hervorgehen zu sehen.

Namentlich ist es interressant, die Sätze (§. §. 260. und 261.) selbst, noch einmal auch hieraus ableiten zu können, in so ferne man

$$px^2+qx+r = p\left(x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}\right) = p(x^2+p_1x+q_1)$$

schreiben kann, und wenn man bemerkt, daß px^2+qx+r mit $x^2+p_1x+q_1$ zugleich positiv oder zugleich negativ ist, so lange p positiv, daß aber wenn p negativ ist, für jeden reelen Werth von x, die Werthe von px^2+qx+r und von $x^2+p_1x+q_1$ allemal entgegengesetzte (+ oder —) Zeichen haben werden.

Zahlenlehre.

Eilftes Kapitel.

Von den Ausdrücken von der Form ax^3+bx^2+cx+d. Von den Werthen von x, welche sie zu Null machen. Von der allgemeinen Kubikwurzel. Von der Auflösung derjenigen Gleichungen mit mehren Unbekannten, welche zu kubischen Gleichungen mit einem Unbekannten führen.

Erste Abtheilung.

Von der Auflösung der kubischen Gleichung und von der allgemeinen Kubikwurzel *).

§. 265. Aufgabe.

Die reine kubische Gleichung

$$1)\ x^3 = a$$

aufzulösen.

*) Die 3te Potenz a^3, nennt man auch den Kubus von a, so wie $\sqrt[3]{a}$ auch die Kubikwurzel aus a genannt wird. Auch braucht man häufig das Wort kubiren, wo die 3te Potenz genommen werden soll.

Auflösung I. Ist a eine positive (absolute) Zahl und $\sqrt[3]{a}$ ihre absolute Wurzel, so hat man $x^3 - a = 0$,

d. h. $x^3 - (\sqrt[3]{a})^3 = 0$

d. h. 2) $(x - \sqrt[3]{a}) \cdot [x^2 + (\sqrt[3]{a})x + (\sqrt[3]{a})^2] = 0$ *).

Nun macht aber jeder Werth von x, welcher den einen Faktor $x - \sqrt[3]{a}$, oder den andern Faktor $x^2 + (\sqrt[3]{a})x + (\sqrt[3]{a})^2$ zu Null macht, nothwendig auch das ganze Produkt zu Null, d. h. die Gleichung (2.) und somit auch die gegebene Gleichung (1.), identisch. Also gibt es 3 Werthe von x, welche die kubische Gleichung

$$x^3 = a$$

identisch machen, nämlich die Werthe, welche aus den Gleichungen

$$x - \sqrt[3]{a} = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + (\sqrt[3]{a}) \cdot x + (\sqrt[3]{a})^2 = 0$$

für x hervorgehen, und welche nach (§. 117. und §. 242.) sind

$$x = \sqrt[3]{a}, \qquad x = \sqrt[3]{a} \cdot (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

und

$$x = \sqrt[3]{a} \cdot (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}).$$

II. Ist aber a eine negative Zahl $= -b = (-1) \cdot b$, und $\sqrt[3]{b}$ die absolute Kubikwurzel, so kann man $(-\sqrt[3]{b})^3$ statt a setzen; und dann gelten vorstehende 3 Auflösungen offenbar noch gerade so, sobald man nur unter $\sqrt[3]{a}$, jetzt $-\sqrt[3]{b}$ sich denkt.

III. Ferner gelten die 3 Auflösungen auch noch, wenn $a = 0$ ist; nur fallen sie dann alle dreye in eine einzige zusammen, nämlich in $x = 0$.

IV. Ist a ganz allgemein, so ist eine allgemeine Auflösung der gegebenen kubischen Gleichung $x^3 = a$ nicht eher möglich, als bis der Begriff der Kubikwurzel $\sqrt[3]{a}$, für den Fall, daß a allgemein ist, erweitert seyn wird.

---

*) Weil $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ ist.

§. 266. Zusatz.

Die reine kubische Gleichung

$$x^3 = a$$

hat nie mehr als 3 Auflösungen; d. h. es gibt nie mehr als 3 Werthe von x, welche die Eigenschaft mit einander gemein haben, daß sie in $x^3 = a$ statt x gesetzt, diese Gleichung identisch machen d. h. daß sie mit 3 potenzirt (kubirt) jedesmal einen und denselben Ausdruck liefern.

Denn jeder Werth von x, welcher der Gleichung $x^3 - a = 0$ genügt, muß einen der beyden Faktoren

$$x - \sqrt[3]{a} \quad \text{oder} \quad x^2 + (\sqrt[3]{a}) \cdot x + (\sqrt[3]{a})^2$$

zu Null machen, weil, wenn der eine nicht Null ist, man durch ihn die ganze Gleichung $x^3 - a = 0$ wegdividiren kann, wodurch sich dann der andere Faktor $= 0$ ergibt.

§. 267. Erklärung.

Damit aber eine allgemeine Auflösung der kubischen Gleichung $x^3 = a$ möglich werde, sehen wir uns genöthigt, die $\sqrt[3]{a}$ so allgemein aufzufassen, daß wir in ihr ein bloßes Zeichen erblicken, welches mit der Eigenschaft begabt ist, mit 3 potenzirt, a zu geben. Dieses mag dann die allgemeine Kubikwurzel genannt werden. (Man vergl. sorgfältig §. 235.).

§. 268. Zusatz.

Weil jedoch, wenn a eine reele Zahl nämlich $+b$ oder $-b$, und $\alpha = \sqrt[3]{b}$, oder $= -\sqrt[3]{b}$ ist, unter $\sqrt[3]{b}$ die absolute Kubikwurzel gedacht, nach (§. 265.) allemal drey Werthe existiren, nämlich

$$\alpha \text{ und } \alpha \cdot \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right) \text{ und } \alpha \cdot \left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right),$$

welchen die, jetzt unter der allgemeinen Kubikwurzel $\sqrt[3]{a}$ begriffene Eigenschaft gemein ist, so bleibt es unbestimmt, welcher der 3 Werthe jedesmal unter dem Zeichen $\sqrt[3]{a}$ zu verstehen sey. —

Deshalb muß schon im allgemeinen die allgemeine Kubikwurzel $\sqrt[3]{a}$ als dreydeutig angesehen werden; d. h. es lassen sich 3 Formen bilden, nämlich

$$\sqrt[3]{a}\cdot 1, \quad \sqrt[3]{a}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right), \quad \sqrt[3]{a}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right),$$

in welchen die Form $\sqrt[3]{a}$ als eindeutig, oder doch als jedesmal einen und denselben ihrer 3 Werthe vorstellend gedacht wird, und von denen jede die Eigenschaft hat, daß sie mit 3 potenzirt, allemal dasselbe a wiedergibt.

Anmerkung. Die 3 Werthe der $\sqrt[3]{1}$ sind daher

$$1 \text{ und } -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \text{ und } -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3};$$

und jeder derselben hat die Eigenschaft, daß er mit 3 potenzirt, d. h. 3mal genommen und diese 3 gleichen Faktoren mit einander multiplizirt, gerade 1 gibt. — So ist z. B.

$$\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}+\sqrt{-3}\right) = -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3};$$

und dieses noch einmal mit $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ multiplizirt, gibt

$$\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right) = 1;$$

also

$$\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^3 = 1.$$

Dasselbe würde sich ergeben, wenn man (§. 149. Lehrs. 1.), nämlich

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

zu Hülfe nehmen und $-\frac{1}{2}$ statt a, $\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ aber statt b setzen wollte.

§. 269. Zusatz.

Von den Sätzen des (§. 150.) gelten aber

α) 1) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$,

2) $\sqrt[3]{(a^3)} = a$;

die erstere, man mag unter der Form $\sqrt[3]{a}$ jeden beliebigen der 3 Werthe sich vorgestellt denken, die andern dagegen nur unter der Einschränkung daß $\sqrt[3]{(a^3)}$ von ihren 3 Werthen

$$a, \quad a\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right) \text{ und } a\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)$$

nur den erstern a vorstellt.

β) Der Satz, daß Gleiches durch Gleiches radizirt, Gleiches wiedergibt, d. h. daß, wenn $a = b$ ist, auch $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$ seyn müsse, gilt wieder nur mit der Einschränkung, daß wenn man für $\sqrt[3]{a}$ einen ihrer 3 Werthe setzt, dann statt $\sqrt[3]{b}$ nicht jeder beliebige, sondern gerade derselbe der 3 Werthe von $\sqrt[3]{b}$ gesetzt werde, weil nur dann eine (identische) Gleichung entsteht.

Demnach gilt das Ableiten der Gleichungen nach (§. 150.), mithin gelten auch die Sätze der (§. §. 136. und 149.) für diese allgemeinern Kubikwurzeln wieder nur mit der (§. 239.) bereits gemachten Einschränkung, 1) daß alle Potenzen, Wurzeln und Logarithmen solche sind, welche in dem bisherigen bereits eine bestimmte Bedeutung erhalten haben, 2) daß unter jeder solchen Form, wie $\sqrt[3]{a}$, nicht jeder beliebige, sondern nur jedesmal ein bestimmter der 3 Werthe verstanden werde.

So ist z. B. die Gleichung

$$\sqrt[3]{(ab)} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$$

in dem Sinne richtig, daß das Produkt rechts, nämlich $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$, wenn es mit 3 potenzirt wird, allemal $(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b})^3$ d. h. $(\sqrt[3]{a})^3 \cdot (\sqrt[3]{b})^3$ d. h. ab gibt, also allemal einer der 3 Werthe von $\sqrt[3]{(ab)}$ ist, welchen der 3 Werthe man auch statt $\sqrt[3]{a}$ oder $\sqrt[3]{b}$ nehmen mag. Sie ist aber nicht mehr richtig, wenn man statt $\sqrt[3]{a}$ und $\sqrt[3]{b}$ wirklich bestimmte ihrer 3 Werthe setzt, und nun statt $\sqrt[3]{(ab)}$ nicht gerade denjenigen ihrer 3 Werthe setzen wollte, der durch $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ ausgedrückt ist, sondern einen der beyden andern.

Ist etwa $a = 8$, $b = 27$, so hat $\sqrt[3]{a}$ die 3 Werthe

2, $-1+\sqrt{-3}$ und $-1-\sqrt{-3}$;

und eben so hat $\sqrt[3]{b}$ die 3 Werthe

3, $-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-3}$ und $-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{-3}$,

während die 3 Werthe von $\sqrt[3]{(ab)}$ d. h. von $\sqrt[3]{216}$

$\sqrt[6]{\ }$ $\quad -3+3\sqrt{-3}$ und $-3-3\sqrt{-3}$

sind. — Setzt man nun in der Gleichung

$$\sqrt[3]{(ab)} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b},$$

statt $\sqrt[3]{a}$ den Werth 2, statt $\sqrt[3]{b}$ den Werth 3 und statt $\sqrt[3]{(ab)}$ den Werth 6, so hat man die richtige Gleichung

$$6 = 2 \cdot 3.$$

Setzt man aber statt $\sqrt[3]{a}$ den Werth 2, statt $\sqrt[3]{b}$ dagegen den Werth

$$-\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2}\sqrt{-3},$$

so muß man statt $\sqrt[3]{(ab)}$ den Werth

$$-3-3\sqrt{-3}$$

setzen, wenn die Gleichung $\sqrt[3]{(ab)} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$, jetzt

$$-3-3\sqrt{-3} = 2(-\tfrac{3}{2}-\tfrac{3}{2}\sqrt{-3})$$

eine richtige seyn soll; und es würde solche nicht mehr richtig seyn, wenn man jetzt statt $\sqrt[3]{(ab)}$ den Werth 6 oder den Werth $-3+3\sqrt{-3}$ setzen wollte.

§. 270. Zusatz.

Ueberhaupt ergibt sich für das Arbeiten mit solchen allgemeinen Kubikwurzeln, gerade wie solches (§. 238.) für die allgemeinen Quadratwurzeln bereits gesagt worden ist, weil $\sqrt[3]{a}$ mehrdeutig ist, die praktische Vorsichtsregel

> „unter derselben Form $\sqrt[3]{a}$, wenn sie in einem Ausdruck oder in einer Gleichung mehremale vorkommt, nicht geradezu einen und denselben Ausdruck sich zu denken, weil dieselbe Form $\sqrt[3]{a}$, bald statt des einen, bald statt des andern, bald auch statt des dritten ihrer 3 Werthe stehen kann".

Man muß also z. B.

statt $p\sqrt[3]{a} \pm q\sqrt[3]{a}$ nicht sogleich $(p \pm q)\sqrt[3]{a}$, statt $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}$ nicht sogleich $(\sqrt[3]{a})^2$ u. s. w. setzen, sondern erst untersuchen, ob in den links stehenden

Ausdrücken, unter der Form $\sqrt[3]{a}$, auch wirklich jedesmal, so oft dieselbe Form vorkommt, ein und derselbe ihrer Werthe gedacht werden kann oder muß. *)

§. 271. Zusatz.

Es kann aber jetzt die reine kubische Gleichung

$$x^3 = a,$$

wenn a ganz allgemein noch ist, aufgelöset werden, und sie gibt für x die 3 Form-Werthe

$$\sqrt[3]{a},\quad \sqrt[3]{a}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\quad \text{und}\quad \sqrt[3]{a}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\right),$$

wenn in diesen 3 Ausdrücken $\sqrt[3]{a}$ als einen und denselben ihrer Werthe vorstellend gedacht wird.

Und ist a eine absolute (positive) Zahl, so kann statt $\sqrt[3]{a}$ ihre nach dem 7ten Kapitel zu findende absolute Wurzel gesetzt werden. Ist aber a eine negative Zahl, $= -b$, so kann statt $\sqrt[3]{a}$ gesetzt werden $-\sqrt[3]{b}$, unter der $\sqrt[3]{b}$ wiederum die absolute Wurzel verstanden, weil wiederum

$$(-\sqrt[3]{b})^3 = -(\sqrt[3]{b})^3 = -b = a \quad \text{ist.}$$

§. 272. Aufgabe.

Die kubische Gleichung

$$1)\quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

nach dem Unbekannten x aufzulösen.

Auflösung. Man suche sie in eine andere mit einer geringern Anzahl von Gliedern, die hernach bequemer zu behandeln ist,

---

*) Die Vernachlässigung dieser für mehrdeutige Ausdrücke so wichtigen und so einfachen Vorsichtsregel ist eine der Haupt-Ursachen der vielen und großen Irrthümer, welche in den ausgezeichnesten Arbeiten der höhern Analysis noch so häufig angetroffen werden. Vgl. die Aufsätze aus dem Gebiete der höhern Mathematik. Berlin 1823.

zu verwandeln. Zu dem Ende setze man $z+h$ statt x, so geht diese Gleichung (1.) über, nach (§. 149. Lehrsatz 1.) in

$$z^3+(3h+a)z^2+(3h^2+2ah+b)z+(h^3+ah^2+bh+c)=0$$

d. h. in 2) $z^3+pz+q=0$,

wenn man h so genommen sich denkt, daß

3) $3h+a=0$ d. h. $h=-\frac{1}{3}a$ wird,

und wenn man

4) $3h^2+2ah+b$ d. h. $b-\frac{1}{3}a^2$ durch p,

so wie

5) h^3+ah^2+bh+c d. h. $c-\frac{1}{3}ab+\frac{2}{27}a^3$ durch q

bezeichnet (vergl. §. 241.).

Man hat nun diese einfachere Gleichung

$$2)\ z^3+pz+q=0$$

aufzulösen.

Um dies zu bewerkstelligen setze man in ihr wiederum $u+v$ statt z, und suche durch Werthe von u und von v die dadurch entstehende Gleichung

$$6)\ u^3+v^3+q+(p+3uv)(u+v)=0$$

identisch zu machen, welches geschieht, wenn u und v so gesucht werden, daß

7) $u^3+v^3+q=0$ und zugleich 8) $p+3uv=0$

wird.

Um aber die Werthe von u und von v zu finden, welche die beyden Gleichungen (7. und 8.) identisch machen, verfahre man so:

Man findet aus (8.):

$$9)\ u=-\frac{1}{3}\frac{p}{v}=\frac{-\frac{1}{3}p}{v},$$

welcher Werth statt u gesetzt, die Gleichung (8.) identisch, und die (7.) in

$$10)\quad \frac{-\frac{1}{27}p^3}{v^3}+v^3+q=0,$$

oder, wenn mit v^3 multiplizirt wird, in

$$11)\quad (v^3)^2+q\cdot(v^3)-\tfrac{1}{27}p^3=0$$

übergehen macht, welche letztere Gleichung, wenn man v^3 als den Unbekannten ansieht, quadratisch ist, und nach (§. 242.) aufgelöst:

$$12)\quad v^3=-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}$$

gibt. Diese Gleichung ist aber wieder nach dem Unbekannten v eine reine kubische und gibt nach (§. 271.) aufgelöst:

$$13)\quad v=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}},$$

welcher Ausdruck, wegen des doppelten Radikanden, und weil die Kubikwurzel 3deutig ist, 6 verschiedene Werthe für v liefert. *) Zu jedem dieser Werthe von v, gehört nun der einzige Werth von u in (9.), nämlich

$$14)\quad u=\frac{-\frac{1}{3}p}{v}=\frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}}.$$

Und weil diese Werthe von u und v die Gleichungen (7.) und (8.) identisch machen, so machen sie auch die Gleichung (6.) d. h. die Gleichung (2.) identisch, wenn in letzterer u+v statt z gesetzt wird, d. h. wenn

$$15)\quad z=v+u=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}+\frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}}$$

genommen wird, wo jede Quadratwurzel und jede Kubikwurzel jedesmal einen und denselben ihrer Werthe vorstellt.

---

*) Dies kommt daher, weil die Gleichung (11.) so geschrieben werden kann:

$$v^6+qv^3-\tfrac{1}{27}p^3=0,$$

also nach v vom 6ten Grade ist; und später werden wir erfahren, daß jede Gleichung vom 6ten Grade 6 Auflösungen gibt.

Und wenn die Gleichung (2.) durch diesen Werth von z identisch wird, so wird die Gleichung (1.) identisch, so oft man, nach (3.):

$$16)\quad x = z - \tfrac{1}{3}a = -\tfrac{1}{3}a + v + u = -\tfrac{1}{3}a + v + \frac{-\frac{1}{3}p}{v}$$

$$= -\tfrac{1}{3}a + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}}$$

nimmt, und dabey nach (4. und 5.)

$b - \frac{1}{3}a^2$ statt p

und $c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3$ statt q

schreibt, oder geschrieben sich denkt; endlich für jede der vorkommenden Wurzelformen, so oft sie auch erscheint, doch immer einen und denselben ihrer Werthe setzt.

Dabey findet man für z, also auch für x, 6 Werthe, weil jeder der 6 Werthe von v, statt v gesetzt werden kann. Diese 6 Werthe sind aber vielleicht nicht alle von einander verschieden, so daß sie in eine geringere Anzahl noch wirklich verschiedener Werthe zusammenfallen können, was nun noch näher untersucht werden muß.

§. 273. Zusatz.

So wie v 6 Werthe hat, so hat auch u 6 Werthe, weil zu jedem andern Werth von v, auch ein anderer Werth von u gehört, in so ferne immer $u = \frac{-\frac{1}{3}p}{v}$ genommen werden muß, wenn alle beyde Gleichungen (7. und 8.) nämlich

$$7)\quad u^3 + v^3 + q = 0 \quad \text{und} \quad 8)\quad p + 3uv = 0$$

zugleich identisch werden sollen. Man konnte aber diese 6 Werthe von u direkt und genau so finden, wie oben die 6 Werthe von v gefunden worden sind. Es wird nämlich die Gleichung (8.) identisch, wenn man

$$9)\quad v = \frac{-\frac{1}{3}p}{u}$$

nimmt, und die Gleichung (7.) geht dadurch über in

$$10)\quad u^3 - \frac{\frac{1}{27}p^3}{u^3} + q = 0,$$

welche also noch durch zu findende Werthe von u identisch gemacht werden muß, wenn (7. und 8.) zugleich identisch seyn sollen. Diese letztere Gleichung liefert aber

$$11)\quad (u^3)^2 + q(u^3) - \tfrac{1}{27}p^3 = 0,$$

$$12)\quad u^3 = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3},$$

$$13)\quad u = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}},$$

so daß man für u genau dieselben 6 Werthe erhält als (§. 272. Nr. 13.) solche für v gefunden worden sind. — Weil wir aber wohl wissen, daß zu jedem Werth von v nur ein einziger Werth von u gehört, so fragt sich jetzt, welcher von den 6 hier in (13.) stehenden Werthen von u, muß zu einem bestimmten der 6 Werthe von v (aus §. 272. Nr. 13.) genommeu werden? — Offenbar gehören immer zwey solche Werthe von v und u zusammen, welche beyde Gleichungen (7.) und (8.) zugleich identisch machen, weil sie gerade so gesucht worden sind. Damit aber (7.) d. h. $u^3 + v^3 + q = 0$ identisch wird, müssen die Werthe der Quadratwurzeln in u und in v mit verschiedenen (+ oder —) Zeichen versehen seyn, so daß man

$$15)\quad z = v + u = u + v = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

schreiben kann, indem man die oberen (+ oder —) Zeichen zugleich, oder die unteren zugleich gelten läßt.

Weil aber auch noch (8.), nämlich

$$14)\quad p + 3uv = 0 \quad \text{d. h.} \quad \tfrac{1}{3}p + uv = 0$$

identisch werden muß, so muß man zu jedem der 3 Werthe der

ersten Kubikwurzel (für v), allemal den einzigen Werth der andern Kubikwurzel (für u) dazu nehmen, welcher $u = \frac{-\frac{1}{3}p}{v}$ oder $uv = -\frac{1}{3}p$ macht, welches jedoch in der allgemeinen Formel nicht weiter ausgedrückt werden kann, sondern nur im Gedächtniß behalten werden muß, weswegen der Ausdruck für z in (Nr. 15. des §. 272.) besser ist, weil er nichts voraussetzt, als daß die Wurzeln alle einen und denselben ihrer Werthe vorstellen, was ohnedies gerne angenommen wird.

Anmerkung 1. Man konnte den hier (Nr. 13.) gefundenen Werth für u, auch aus dem (Nr. 14. des §. 272.) gefundenen ableiten. Jener liefert nämlich

$$u^3 = \frac{(-\frac{1}{3}p)^3}{v^3} = \frac{-\frac{1}{27}p^3}{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Multiplizirt man hier, wie in solchen Fällen gewöhnlich, Zähler und Nenner des Bruches zur Rechten,

mit $-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$,

damit die Wurzel aus dem Nenner herausfalle, so wird der neue Nenner

$$\frac{1}{4}q^2 - (\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3) \quad \text{d. h.} \quad -\frac{1}{27}p^3$$

und hebt sich gegen den alten Zähler $-\frac{1}{27}p^3$, weg, so daß man bloß

$$u^3 = -\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3},$$

d. h: $$u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$$

erhält, wie solches in (Nr. 13. des §. 273.) gerade so gefunden worden.

Anmerkung 2. Man konnte auch im (§. 272.), wo die Werthe von u und von v gesucht werden, welche die Gleichungen

7) $u^3 + v^3 + q = 0$ und 8) $p + 3uv = 0$

identisch machen, folgende Betrachtungen anstellen: Die Ansicht dieser Gleichungen (7. und 8.) zeigt sogleich, das sie in Bezug auf u und v symmetrisch sind, d. h. daß sie sich nicht verändern, wenn auch in ihnen u und v mit einander vertauscht werden. Dieselbe Form, welche für v gefunden worden, mußte sich also genau auch, wie solches (§. 273.) noch besonders zu sehen war, auch für u ergeben; so daß also, so wie

$$v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}$$

gefunden war, sogleich auch

$$u = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

hingeschrieben werden konnte. Aber daraus daß sich für u und v ganz genau eine und dieselbe Form ergeben hat, kann gar nicht gefolgert werden, daß beyde, nämlich u und v, einander gleich sind, weil diese Form 6deutig ist, und, während für v einer der 6 Werthe genommen wird, gerade ein anderer dieser 6 Werthe für u genommen werden muß, wie sich solches sogleich bestätigt, wenn man die (§. 273.) gemachte Untersuchung anstellt und die zusammengehörigen Werthe von u und v heraussucht, diejenigen nämlich, welche beyde Gleichungen (7. und 8.) zugleich identisch machen.

§. 274. Zusatz.

Ferner folgt jetzt sogleich, daß, obgleich v und u 6 Werthe haben, doch $z = u+v$, also auch $x = -\frac{1}{3}a+z$ in den Gleichungen (2.) und (1.) des (§. 272.), nämlich in

$$2) \quad z^3+pz+q = 0$$

und $$1) \quad x^3+ax^2+bx+c = 0,$$

nicht mehr als 3 wirklich von einander verschiedener Werthe erhalten; weil, wenn man in v das —Zeichen der Quadratwurzel, also in u das +Zeichen der Quadratwurzel nimmt, die Werthe von u und von v sich bloß vertauschen, dagegen die Summe u+v oder v+u doch immer die alte bleibt. Man kann daher recht gut

$$z = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}$$

nehmen, unter der Quadratwurzel nur einen einzigen, aber einen und denselben ihrer beyden Werthe sich denken, und die beyden Kubikwurzelwerthe so heraussuchen, daß sie beyde mit einander multiplizirt, gerade $-\frac{1}{3}p$ geben. — In dieser Gestalt heißt der Ausdruck für z, welcher der kubischen Gleichung (2.) genügt, die kardanische Formel.

Anmerkung. Sind v_1 und u_1 solche Werthe von v und u, d. h. von den Kubikwurzeln

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}},$$

für

für welche wirklich $\frac{1}{3}p+uv$ d. h. $\frac{1}{3}p+v_1u_1$, $= 0$ ist, so sind die 3 Werthe von z folgende

$$z = v_1+u_1$$
$$z = v_1(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})+u_1(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

und
$$z = v_1(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})+u_1(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3});$$

weil das Produkt

$$(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

allemal $= 1$ ist, und weil

$$v_1,\quad v_1(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \text{ und } v_1(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

nach (§. 268.) die 3 Werthe von v sind.

§. 275. Zusatz.

Jede kubische Gleichung liefert also für den Unbekannten 3 Werthe, nie mehr als 3, in so ferne aber zuweilen weniger als 3, als alle 3 Werthe oder doch zweye davon einander gleich werden können, für gewisse Werthe der Koeffizienten der gegebenen Gleichung.

Jede kubische Gleichung

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D = 0,$$

kann nämlich, wenn man durch A wegdividirt, in

$$x^3+\frac{B}{A}x^2+\frac{C}{A}x+\frac{D}{A} = 0$$

d. h. wenn a, b, c, statt $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$ und $\frac{D}{A}$ gesetzt wird, in

$$x^3+ax^2+bx+c = 0$$

übergehen, also in dem vorhergehenden ihre Auflösung finden.

Folgende Beyspiele mögen die Anwendung der Cardan'schen Formel auf spezielle Zahlen-Fälle, so wie ihre Schwierigkeiten näher beleuchten.

Beispiel 1. Wenden wir sie auf die Gleichung

$$x^3+1 = 0$$

an, wo also $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, mithin $p = 0$, $q = 1$,

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}$$

und
$$x = z = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}}$$
$$= \sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{(-1)} = \sqrt[3]{(-1)} \text{ wird,}$$

so bekommt man, weil -1 einer der Werthe dieser letztern Kubikwurzel ist, die 3 Werthe von x, nämlich

$$-1,\quad (-1)\cdot(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}),\quad (-1)\cdot(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

d. h. $$-1,\quad \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \text{ und } \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Beispiel 2. Wenden wir sie auf die Gleichung

$$(x-2)(x^2+x+1) = 0$$

d. h. auf

$$x^3-x^2-x-2 = 0 \text{ an,}$$

so ist $a = -1,\ b = -1,\ c = -2,\ p = -\frac{4}{3},\ q = -2\frac{1}{27}$

d. h. $q = -\frac{65}{27}$; und $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3 = \frac{3969}{4\cdot(27)^2}$;

also

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3} = \tfrac{63}{54};$$

und

$$z = \sqrt[3]{\tfrac{65}{54}+\tfrac{63}{54}}+\sqrt[3]{\tfrac{65}{54}-\tfrac{63}{54}} = \sqrt[3]{\tfrac{64}{27}}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{27}}.$$

Nun sind die 3 Werthe von $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$

$$\tfrac{4}{3},\quad \tfrac{4}{3}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \text{ und } \tfrac{4}{3}(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3});$$

und die 3 Werthe von $\sqrt{\frac{1}{27}}$

$$\tfrac{1}{3},\quad \tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \text{ und } \tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3});$$

und da $uv = -\frac{1}{3}p = \frac{4}{9}$ werden muß, so muß man die beyden ersten $\frac{4}{3}$ und $\frac{1}{3}$, dann aber von der ersten Reihe den 2ten, von der andern aber den 3ten, zuletzt von der ersten Reihe den dritten, von der andern aber den 2ten zusammen nehmen, weil

$$(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) = 1 \text{ ist;}$$

und man erhält also (Anmerkung zu §. 274.)

$$z = \tfrac{4}{3}+\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{3},$$

oder $z = \frac{4}{3}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3})+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}) = -\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\sqrt{-3},$

oder $z = \frac{4}{3}(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3})+\frac{1}{3}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}) = -\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{-3};$

demnach auch, weil $x = z-\frac{1}{3}a = \frac{1}{3}+z$ ist,

$$x = \tfrac{5}{3}+\tfrac{1}{3} = \tfrac{6}{3} = 2,$$

oder $$x = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3},$$

oder $$x = -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$ *)

---

*) Da die im 2ten Beyspiel gegebene Gleichung $x^3-x^2-x-2=0$, bereits so geschrieben $(x-2)(x^2+x+1) = 0$ gegeben war, so hätte man die Werthe von x dasmal leichter dadurch finden können, daß man diejenigen suchte, welche den einen oder den andern Faktor zu Null, d. h. welche entweder $x-2 = 0$ oder $x^2+x+1 = 0$ machen.

Beyspiel 3. Wäre aufzulösen die Gleichung

$$(x-2)(x^2+x+2) = 0 \quad \text{d. h. } x^3-x^2-4 = 0,$$

so wäre dasmal $a = -1,\ b = 0,\ c = -4,$

also $p = -\frac{1}{3},\ q = -\frac{110}{27}$;

demnach $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{110^2}{27^2} - \frac{1}{27^2} = \frac{12096}{54^2},$

und $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3} = \frac{\sqrt{12096}}{54} = \frac{109{,}981\cdots}{54} = \frac{54{,}991}{27},$

und $z = \sqrt[3]{+\frac{55}{27}+\frac{54{,}991}{27}} + \sqrt[3]{+\frac{55}{27}-\frac{54{,}991}{27}},$

$$= \sqrt[3]{\frac{109{,}991}{27}} + \sqrt[3]{\frac{0{,}009}{27}}$$

Nimmt man nun zunächst die reelen Werthe dieser Kubikwurzeln nach dem 7ten Kapitel, so erhält man

$$\sqrt[3]{\frac{109{,}991}{27}} = \frac{1}{3}\cdot(4{,}7\cdots) \text{ und } \sqrt[3]{\frac{0{,}009}{27}} = \frac{1}{3}\cdot(0{,}2\cdots);$$

und da diese reelen Werthe mit einander multiplizirt, wirklich $\frac{1}{9}\cdot(0{,}9999\cdots)$ d. h. wenn man die Wurzeln auf mehr Dezimalen bestimmt) genau $\frac{1}{9}$ oder $-\frac{1}{3}p$ geben, so sind sie schon zusammengehörige Werthe, so daß man findet (wenn nur gehörig viel Dezimalstellen berechnet werden):

$$z = \frac{1}{3}\cdot(4{,}7\cdots)+\frac{1}{3}\cdot(0{,}2\cdots)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot(4{,}99999\cdots) = \frac{5}{3}.$$

Außerdem hat man dann noch

$$z = \frac{1}{3}\cdot(4{,}7\cdots)\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)+\frac{1}{3}(0{,}2\cdots)\left(-\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)$$

d. h. $z = -\frac{5}{6}+(0{,}7\cdots)\sqrt{-3},$

oder $z = -\frac{5}{6}-(0{,}7\cdots)\sqrt{-3};$

demnach, weil $x = z-\frac{1}{3}a = \frac{1}{3}+z$ ist,

auch $x = 2,$

$x = -\frac{1}{2}+(0{,}76\cdots)\sqrt{-3},$

oder $x = -\frac{1}{2}-(0{,}76\cdots)\sqrt{-3}.$ *)

---

*) Diese Werthe von x mußte man auch erhalten, wenn man die Werthe suchte, welche

$$x-2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2+x+2 = 0$$

machen. Löst man aber letztere Gleichung nach (§. 241.) auf, so erhält man

$$x = -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-7}.$$

Beispiel 4. Sey aufzulösen die Gleichung

$$(x-2)(x^2-1) = 0, \text{ d. h. } x^3-2x^2-x+2 = 0,$$

so hat man dasmal

$$a = -2, \quad b = -1, \quad c = 2, \text{ also } p = -\tfrac{7}{3}, \quad q = \tfrac{20}{27};$$

demnach $$\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3 = \frac{100}{27^2} - \frac{7^3}{27^2} = -\frac{243}{27^2},$$

und $$\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3} = \tfrac{1}{27}\sqrt{-243};$$

mithin $$z = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-10+\sqrt{-243}} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-10-\sqrt{-243}}.$$

Es kommt also nun alles darauf an, daß man aus den imaginären Zahlen $-10\pm\sqrt{-243}$ die Kubikwurzel zu ziehen verstehe, d. h. diese Kubikwurzel dergestalt umzuformen wisse, daß die Resultate durch Addition vereinigt, und die imaginären Theile herausfallen können.

Wir haben aber in dem Kapitel (7.), welches die Verwandlung der Ziffern-Ausdrücke zum Gegenstand hatte, zwar gelehrt, wie man aus ganzen und gebrochenen Zahlen, die Quadrat-, Kubik- und höhern Wurzeln zieht, dagegen noch nicht, wie man es macht, um aus negativen und imaginären Ausdrücken, so weit solche bis jetzt entstanden seyn können, diese Wurzeln zu finden. — Das 14te Kapitel soll jedoch diese Fortsetzung der Ziffernrechnung liefern; dann läßt sich das gegenwärtige Beyspiel vollends durchrechnen, und man wird für x die 3 Werthe 2, 1 und -1, wenn auch erst nach mühsamen Rechnungen, wirklich finden.

Anmerkung. In der Folge wird gezeigt werden:

1) Sind in der kubischen Gleichung $x^3+ax^2+bx+c = 0$ die Koeffizienten a, b, c alle reel, so sind entweder alle 3 Werthe von x reel, oder doch einer davon; und kommt ein imaginärer Werth von x vor, so sind allemal 2 solche imaginäre Werthe von x vorhanden.

2) Die Cardan'sche Formel enthält nie eine imaginäre Quadratwurzel unter ihren Kubikwurzelzeichen, so lange nur einer der 3 Werthe

---

Um sich nun zu überzeugen, daß diese Werthe von x mit obigen zusammenfallen, bemerke man daß

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7}\cdot\sqrt{-1} = (2{,}645\ldots)\sqrt{-1}$$

und $$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} = (1{,}732\ldots)\sqrt{-1}$$

ist, setze diese Werthe statt $\sqrt{-7}$ und statt $\sqrt{-3}$ in die obigen für x gefundenen Ausdrücke, berechne alles auf hinlänglich viel Dezimalstellen, so wird sich die Identität dieser Ausdrücke, so weit man solche nachgewiesen sehen will, nicht verkennen lassen.

von x reel ist; diese Quadratwurzeln werden aber allemal imaginär, so oft alle 3 Werthe von x reel und ungleich sind.

Uebrigens nennt man diesen letztern Fall der Anwendung der Cardan'schen Formel, den irreduktiblen Fall.

§. 276. Zusatz.

Statt, wie dies jetzt geschehen sollte, zwey Gleichungen mit 2 Unbekannten, dann 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten, u. s. w. f., zuletzt n Gleichungen mit n Unbekannten zur Auflösung vorzulegen, unter der Voraussetzung, daß eine der gegebenen Gleichungen eine allgemeine, (§. 213.) zu sehende Gleichung der 3ten Ordnung, die übrigen aber lauter Gleichungen der ersten Ordnung sind, mögen bloß einige besondere Beyspiele hier stehen, welche den Charakter dieser Aufgaben hervorblicken lassen.

Die Endgleichung, welche den einen der Unbekannten liefert, ist eine kubische, gibt für diesen Unbekannten 3 Werthe, während zu jedem dieser Werthe jeder der übrigen Unbekannten nur einen einzigen Werth erhält. (Vgl. §. §. 244. und 249.).

Beyspiele

1) Aus $x+y=a$ und $x^3-y^3=b$,

folgt $2x^3-3ax^2+3a^2x-(a^3+b)=0$,

welche nun nach x aufgelöst werden muß, während zu jedem der 3 Werthe von x, $y=a-x$ sich ergibt.

2) Aus $x+y=a$ und $x^2y-xy^2=b$,

folgt $2x^3-3ax^2+a^2x+b=0$,

woraus 3 Werthe für x, und zu jedem Werth von x, der Werth $y=a-x$ sich ergibt.

3) Aus $4x-3y=7$ und $xy(x+y)=84$,

folgt $4x^3-11x^2+7x-108=0$,

und daraus wieder $x=4$ und $y=\frac{4x-7}{3}=3$;

ferner $x=\frac{-5\pm\sqrt{-407}}{8}$ und $y=\frac{-19\pm\sqrt{-407}}{6}$,

wo die obern (+ oder −) Zeichen zugleich, oder die untern zugleich gelten.

4) Aus $x-y=3$ und $x^3+y^3=133$,

folgt $2x^3-9x^2+27x-27=0$,

woraus $x=5$ und $y=x-3=2$;

und auch $x=\frac{-1\pm\sqrt{-255}}{4}$ und $y=\frac{-13\pm\sqrt{-255}}{4}$,

wo die obern (+ oder −) Zeichen zugleich oder die untern zugleich gelten.

5) Aus $x+y+z=6$ und $2x+y-z=2$ und $xyz=6$,

folgt $3x^3+4x^2-32x+24=0$,

woraus $x=2$, $y=1$, $z=3$,

aber auch $x=\frac{-5\pm\sqrt{61}}{3}$,

$y=\frac{13\mp\sqrt{61}}{2}$,

und $z=\frac{7\pm\sqrt{61}}{6}$ hervorgeht,

wo die obern (+ oder −) Zeichen zugleich oder die untern zugleich gelten.

6) Aus $ax-by=g$ und $a^3x^3-b^3y^3=hxy$,

folgt $x=\frac{g}{2a}\left(1\pm\sqrt{\frac{h+abg}{h-3abg}}\right)$,

$y=\frac{g}{2b}\left(-1\pm\sqrt{\frac{h+abg}{h-3abg}}\right)$.

Zweyte Abtheilung.

Von den Ausdrücken von der Form ax^3+bx^2+cx+d noch in's Besondere.

---

§. 277. Lehrsätze.

1) Wird Ax^3+Bx^2+Cx+D für mehr als 3 Werthe von x, der Null gleich, so muß jeder der Koeffizienten A, B, C, D für sich der Null gleich seyn; und es ist dann auch für jeden Werth von x,

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0.$$

2) Werden die Ausdrücke

$$A\,x^3+B\,x^2+C\,x+D$$

und

$$A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D$$

für mehr als 3 Werthe von x einander gleich, so sind die mit einerley Potenz von x affizirten Koeffizienten einzeln einander gleich; nämlich

$$A=A_1,\quad B=B_1,\quad C=C_1 \quad \text{und} \quad D=D_1;$$

und es ist dann auch für jeden Werth von x,

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D.$$

Beweise sind nach (§. §. 250. 251.) leicht zu führen und stützen sich darauf, daß wenn eine solche Gleichung sich nicht an sich auf $0=0$ reduzirte, sie nach x eine kubische seyn würde, also nicht durch mehr als 3 Werthe von x identisch werden könnte.

§. 278. Lehrsatz.

Ist α einer der Werthe von x, welcher

$$x^3+Ax^2+Bx+C$$

zu Null macht, so läßt sich dieser Ausdruck allemal in zwey Faktoren zerlegen, von welchen der eine $x-\alpha$, der andre aber von der Form $x^2+\beta x+\gamma$ ist.

Beweis. Denn man ziehe $\alpha^3+A\alpha^2+B\alpha+C$, welches nach der Voraussetzung 0 ist, von dem Ausdrucke x^3+Ax^2+Bx+C ab, so erhält man

$$x^3+Ax^2+Bx+C=(x^3-\alpha^3)+A(x^2-\alpha^2)+B(x-\alpha).$$

Weil aber, wie die bloße Multiplikation lehrt:

$$x^3-\alpha^3=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$$

und $$x^2-\alpha^2=(x-\alpha)(x+\alpha)$$

ist, so wird

$$x^3+Ax^2+Bx+C=(x-\alpha)\cdot[x^2+(\alpha+A)x+(\alpha^2+A\alpha+B)]$$

oder $$=(x-\alpha)\cdot[x^2+\beta x+\gamma],$$

wenn $\alpha+A=\beta$ und $\alpha^2+A\alpha+B=\gamma$ gesetzt wird.

§. 279. Zusatz.

Weil $x^2+\beta x+\gamma$ sich wieder in ein Produkt von der Form

$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ zerlegen läßt (nach §. 253.), so läßt sich allemal

$$x^3+Ax^2+Bx+C$$

in ein Produkt von der Form

$$(x-\alpha)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

zerlegen.

§. 280. Aufgabe.

Man soll die eben erwähnte Zerlegung direkt vornehmen; d. h. man soll den Ausdruck

$$1)\quad x^3+Ax^2+Bx+C$$

direkt in ein Produkt von der Form

$$2)\quad (x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$$

zerlegen.

Auflösung 1. Es ist, wenn man multiplizirt:

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma) =$$
$$x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x+\alpha\beta\gamma. \quad (3).$$

Weil nun dieser Ausdruck (3.) mit dem identisch seyn soll, so muß nach (§. 277.):

$$4)\quad \alpha+\beta+\gamma = A$$
$$5)\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = B$$
$$6)\quad \alpha\beta\gamma = C$$

woraus nun α, β und γ zu entwickeln sind.

Man findet aber aus (4.):

$$7)\quad \gamma = A-(\alpha+\beta)$$

und dies in (5. und 6.) gesetzt, gibt:

$$8)\quad \alpha\beta+A(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)^2 = B$$

und

$$9)\quad A\alpha\beta-\alpha\beta(\alpha+\beta) = C.$$

Betrachtet man hier,

$$10)\quad \alpha\beta = u \qquad \text{und} \qquad 11)\quad \alpha+\beta = v$$

setzend, u und v als die beyden Unbekannten, so sind die Gleichungen (8. und 9.), d. h. jetzt

8) $u+Av-v^2 = B$

und 9) $Au-u \cdot v = C$,

nach u und nach v aufzulösen. Aus (8.) findet sich aber:

12) $u = v^2-Av+B$;

und dieser Werth in (9.) statt u gesetzt, gibt:

13) $v^3-2Av^2+(A^2+B)v+(C-AB) = 0$,

woraus sich nach (§. 272.) für v, 3 Werthe ergeben, und dann aus (12.) zu jedem Werth von v ein zugehöriger Werth von u. —

Hat man nun für u und v solche zusammengehörige Werthe gefunden, welche den Gleichungen (8.) und (9.) genügen, so findet man aus (10. und 11.), nämlich aus:

10) $\alpha\beta = u$ und 11) $\alpha+\beta = v$,

noch α und β dazu, nämlich nach (§. 244.):

$$\alpha = \tfrac{1}{2}v \pm \sqrt{v^2-4u} \quad \text{und} \quad \beta = \tfrac{1}{2}v \mp \sqrt{v^2-4u};$$

und diese Werthe von α und β, so wie $\gamma = A-v$, machen die Gleichungen (4—6.) identisch, also daß Produkt

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$$

mit dem gegebenen Ausdruck

$$x^3+Ax^2+Bx+C$$

identisch.

Auflösung 2. Eine viel einfachere und leichtere Auflösung ist folgende: Soll $x^3+Ax^2+Bx+C = (x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$ werden, so sind $-\alpha$, $-\beta$ und $-\gamma$ die 3 Werthe von x, welche x^3+Ax^2+Bx+C zu Null machen. — Also löse man

Gleichung

$$x^3+A\ ^2+Bx+C = 0$$

nach x auf, versehe die 3 Werthe von x, mit dem ihnen vorzusetzenden (—) Zeichen, und nehme diese Resultate für α, β so hat man das verlangte Produkt.

Anmerkung. Aus dieser zweyten Art die Aufgabe zu geht zu gleicher Zeit hervor, daß sich x^3+Ax^2+Bx+C nur einzige Art in ein solches Produkt zerlegen läßt; daß alle welche die erste Auflösung für α gibt, paarweise einan

und dann sich auf die 3 Werthe reduziren, welche α, β und γ zusammengehörig haben müssen; so daß jeder Faktor in jeder Stelle ein andrer wird, aber die 3 Faktoren selbst doch immer dieselben bleiben.

Setzt man in $x^3+Ax^2+Bx+C=0$, $-x$ statt x, so geht diese Gleichung über in $x^3-Ax^2+Bx-C=0$; und wären die 3 Werthe von x der ersten Gleichung $-\alpha$, $-\beta$ und $-\gamma$, so sind die 3 Werthe von x in der letztern offenbar $+\alpha$, $+\beta$ und $+\gamma$ d. h. die gesuchten α, β und γ.

§. 281. Zusatz.

Sind also α, β und γ die 3 Werthe von x, welche

$$x^3+Ax^2+Bx+C$$

identisch $=0$ machen, so ist allemal

$$1)\quad x^3+Ax^2+Bx+C=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma);$$

und dann noch

$$2)\quad A=-(\alpha+\beta+\gamma),$$
$$3)\quad B=+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma),$$
$$4)\quad C=-\alpha\beta\gamma;$$

d. h. der Koeffizient A ist die Summe dieser 3 Werthe mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen, der andere B ist die Summe der Produkte je zweyer dieser 3 Werthe, und C ist endlich das Produkt aller 3 Werthe, wiederum mit dem entgegensetzten Zeichen genommen.

Werden daher künftig 3 Unbekannte α, β und γ gesucht, welche den 3 Gleichungen genügen sollen,

$$\alpha+\beta+\gamma=u,$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=v,$$
$$\alpha\beta\gamma=w;$$

so sind α, β und γ die 3 Werthe von z, welche statt z gesetzt, die Gleichung

$$z^3-u\cdot z^2+v\cdot z-w=0$$

identisch machen. (Vgl. §. 254.).

§. 282. Aufgabe.

Man soll einen Ausdruck von der Form $x+\alpha$ finden, welcher der Kubikwurzel $\sqrt[3]{x^3+Ax^2+Bx+C}$ identisch ist.

Auflösung. Da

$$1)\ \sqrt[3]{x^3+Ax^2+Bx+C} = x+\alpha$$

seyn soll, so hat man

$$2)\ x^3+Ax^2+Bx+C = (x+\alpha)^3 = x^3+3\alpha x^2+3\alpha^2 x+\alpha^3,$$

also 3) $3\alpha = A$; 4) $3\alpha^2 = B$ und 5) $\alpha^3 = C$.

Aus (3.) folgt $\alpha = \frac{1}{3}A$; und dieser Werth in (4.) und (5.) statt α gesetzt, gibt

$$6)\ \tfrac{1}{3}A^2 = B \quad \text{und} \quad 7)\ \tfrac{1}{27}A^3 = C,$$

welche beyde Gleichungen durch die gegebenen Werthe von A, B, C identisch werden müssen, wenn die Aufgabe selbst möglich seyn soll.

§. 283. Zusatz.

Kann man aber x^3+Ax^2+Bx+C nicht immer auf die Form $(x+\alpha)^3$ bringen, so läßt sich derselbe Ausdruck doch immer auf die Form

$$(x+\alpha)^3+\beta(x+\alpha)+\gamma$$

oder auf die Form

$$(x+\alpha)^3+\beta(x+\alpha)^2+\gamma$$

bringen, weil aus den 3 Gleichungen, welche sich zwischen α, β und γ und A, B, C ergeben, wenn man den, in den vorhergehenden Auflösungen betretenen Weg verfolgt, die 3 Unbekannten α, β, γ sich allemal wirklich bestimmen lassen.

§. 284. Zusatz.

Es lassen sich aber diese letztern Umformungen noch einfacher bezwecken, wenn man in x^3+Ax^2+Bx+C, $z+h$ statt x setzt, ihn also in $(z+h)^3+A(z+h)^2+B(z+h)+C$

d. h. (nach §. 149. Lehrs. 1.) in

$$z^3+(3h+A)z^2+(3h^2+2Ah+B)z+(h^3+Ah^2+Bh+C)$$

übergehen macht; dann aber nach Willkühr, entweder h so bestimmt sich denkt, daß der Koeffizient von z^2, nämlich $3h+A, =0$, oder so bestimmt, daß der Koeffizient von z, nämlich

$$3h^2+2Ah+B, = 0$$

wird. Im erstern Fall wird $h = -\frac{1}{3}A$ und $z = x-h = x+\frac{1}{3}A$,

Im andern Fall wird

$$h = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 3B}}{3}$$

und $$z = x - h = x + \frac{A \mp \sqrt{A^2 - 3B}}{3}.$$

§. 285. Aufgabe.

Man soll den Gang der (reelen) Werthe von

$$x^3 + nx^2 + px + q,$$

welcher Ausdruck, der Kürze wegen, durch f_x bezeichnet seyn kann, angeben, für den Fall, daß n, p, q beliebig reele Zahlen sind, und daß dem x nach und nach alle stetig neben einander liegenden, von $+\infty$ bis zu $-\infty$ abnehmenden, reelen Werthe gegeben werden.

Auflösung I. Genau unter den Voraussetzungen der (§. §. 263. 264.), nämlich wenn h positiv und im Moment des Verschwindens gedacht ist, sind

$$\alpha + h, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \alpha - h$$

drey abnehmende, aber stetig auf einander folgende Werthe von x, und

$$f_{\alpha+h}, \quad f_\alpha, \quad \text{so wie} \quad f_{\alpha-h}$$

stellen dann die dazugehörigen Werthe von f_x d. h. von

$$x^3 + nx^2 + px + q$$

vor.

Und nach (§. 149. Lehrs. 1.) hat man

$$\begin{aligned} f_{\alpha\pm h} &= (\alpha \pm h)^3 + n(\alpha \pm h)^2 + p(\alpha \pm h) + q \\ &= (\alpha^3 + n\alpha^2 + p\alpha + q) \pm (3\alpha^2 + 2n\alpha + p)h \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}(3\alpha + n)h^2 \pm h^3; \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 1)\quad f_{\alpha+h} - f_\alpha &= (3\alpha^2 + 2n\alpha + p)h + \tfrac{1}{2}(3\alpha + n)h^2 + h^3 \\ &= [3\alpha^2 + 2n\alpha + p + (\tfrac{1}{2}(3\alpha + n) + h)h] \cdot h; \\ 2)\quad f_\alpha - f_{\alpha-h} &= (3\alpha^2 + 2n\alpha + p)h - \tfrac{1}{2}(3\alpha + n)h^2 + h^3 \\ &= [3\alpha^2 + 2n\alpha + p - (\tfrac{1}{2}(3\alpha + n) - h)h] \cdot h. \end{aligned}$$

II. Nun ist f_x mit x zugleich $+\infty$ oder $-\infty$. — Denn es ist

f_x d. h. $x^3+nx^2+px+q = (x^2+nx+p)x+q$,

während x^2+nx+p für $x = +\infty$ und für $x = -\infty$, allemal $+\infty$ ist (nach §. 264.). Also ist $(x^2+nx+p)x$, und dann auch, nach (§. 263.), der ganze Ausdruck $(x^2+nx+p)x+q$ d. h. f_x entweder $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem $x = +\infty$ oder $x = -\infty$ ist.

III. Daß die Werthe von f_x mit x zugleich stetig sich ändern, erhellet aus den Unterschieden (1. 2. in I.), weil diese Unterschiede alle kleiner als $(3\alpha^2+2n\alpha+p+1)\cdot h$ sind, also, wie (§. 264.) besonders bewiesen steht, mit h zugleich im Moment des Verschwindens sich befinden.

IV. So lange nun der Koeffizient von h, nämlich $3\alpha^2+2n\alpha+p$ positiv ist, so lange sind die Unterschiede (1. 2. in I.) offenbar beyde zugleich positiv; dagegen sind letztere beyde zugleich negativ, wenn $3\alpha^2+2n\alpha+p$ negativ seyn sollte. Denn wie klein auch $3\alpha^2+2n\alpha+p$ immer seyn möchte, so ist der andere Theil des in den eckigen Klammern eingeschlossenen Faktors dieser Unterschiede (1. 2. in I.), nämlich $(\frac{1}{2}(3\alpha+n)\pm h)\cdot h$ doch allemal noch kleiner d. h. im Moment des Verschwindens, also dieser ganze Faktor nothwendig mit

$$3\alpha^2+2n\alpha+p$$

zugleich positiv oder negativ. —

Im erstern Falle nehmen die Werthe von f_x offenbar mit denen von x zugleich stetig ab. Im andern Falle dagegen wachsen die Werthe von f_x stetig, wenn die von x im stetigen Abnehmen begriffen sind, weil, so oft die Differenz negativ ist, allemal der Subtrahend größer seyn muß, als der Minuend.

V. Ist 1) $3\alpha^2+2n\alpha+p = 0$,
und zugleich auch 2) $3\alpha+n = 0$,
so ist auch 3) $\alpha = -\frac{1}{3}n$,
und dann, wenn dieser Werth in (1.) gesetzt wird,

$$4)\ p-\tfrac{1}{3}n^2=0 \quad \text{oder} \quad n^2-3p=0,$$

welches offenbar nicht allemal, sondern nur in einzelnen Ausnahmsfällen statt finden wird. Aber in diesen Ausnahmsfällen d. h. für diesen Werth $\alpha = -\frac{1}{3}n$, sind doch noch beyde Unterschiede (1. und 2. in I.) zugleich positiv (und $= h^3$), also die Werthe von f_x noch immer mit denen von x zugleich abnehmend.

VI. Ist aber nicht $n^2-3p = 0$, finden also die beyden Gleichungen (1. und 2. in V.) nicht zugleich statt, so kann doch vielleicht die erste allein statt finden,

nämlich $$1)\ 3\alpha^2+2n\alpha+p = 0$$

d. h. $$2)\ \alpha = \frac{-n\pm\sqrt{n^2-3p}}{3}.$$

Wäre dann n^2-3p negativ, so wären die beyden Werthe von α imaginär, während α einer der reelen Werthe von x seyn soll; also muß nun n^2-3p positiv seyn, und zwar ist dann wenn α_1 und α_2 die beyden Werthe von α sind,

$$3)\ \alpha_1 = \frac{-n+\sqrt{n^2-3p}}{3}$$

der größere, und

$$4)\ \alpha_2 = \frac{-n-\sqrt{n^2-3p}}{3}$$

der kleinere (§. 112,) mag übrigens n positiv oder negativ seyn, während

$$5)\ 3\alpha+n = \pm\sqrt{n^2-3p} \text{ ist.}$$

Unter diesen Voraussetzungen ist dann von den Unterschieden (1. 2. in I.) der erstere positiv, der andere negativ, also f_α kleiner als der nächstvorhergehende Werth $f_{\alpha+h}$, und auch kleiner als der nächstfolgende $f_{\alpha-h}$, wenn $3\alpha+n$ d. h. jetzt $\sqrt{n^2-3p}$ positiv, also wenn für α der größere α_1 der beyden Werthe in (2.) gesetzt wird. Dagegen ist von jenen Unterschieden (1. 2. in I.) der erstere negativ, der andere positiv, mithin f_α größer als beyde Nachbarwerthe $f_{\alpha+h}$ und $f_{\alpha-h}$, wenn $3\alpha+n$ d. h. $\sqrt{n^2-3p}$

negativ, also wenn statt α der kleinere α_2 jener beyden Werthe in (2.) genommen worden ist. In beyden Fällen bildet f_α einen Scheidepunkt in dem Gange aller reelen Werthe von f_x; im erstern Falle aber hat f_x von $+\infty$ bis zu dem, zu

$$x = \alpha_1 = \frac{-n+\sqrt{n^2-3p}}{3}$$

gehörigen Werthe $f_{(\alpha_1)}$, abgenommen, und fängt von da an wieder zu wachsen, bis man zu $x = \alpha_2 = \frac{-n-\sqrt{n^2-3p}}{3}$ d. h. zu $f_{(\alpha_2)}$ kommt, während f_x von hier ab wieder abnimmt, und zwar ohne Aufhören bis zu $-\infty$ hin. Der Werth $f_{(\alpha_2)}$ heißt dann ein Größtes (Maximum) während $f_{(\alpha_1)}$ ein Kleinstes (ein Minimum) war.

VII. Ist also n^2-3p positiv, so kommen unter allen reelen Werthen von x, zweye α_1 und α_2 vor, welche $3\alpha^2+2n\alpha+p = 0$ machen; und es bilden dann die Werthe von f_x zwey Scheidepunkte, den erstern $f_{(\alpha_1)}$, wo die Werthe von f_x, nachdem sie von $+\infty$ an abgenommen haben, wieder anfangen größer zu werden; den andern $f_{(\alpha_2)}$, wo, nachdem dieselben Werthe eine Zeitlang wieder zugenommen haben (nämlich von

$$x = \alpha_1 = \frac{-n+\sqrt{n^2-3p}}{3}, \text{ bis zu } x = \alpha_2 = \frac{-n-\sqrt{n^2-3p}}{3}\Big)$$

solche plötzlich wieder anfangen abzunehmen und ohne Aufhören abnehmen, bis zu $-\infty$ hin. (Immer wird aber vorausgesetzt, daß die Werthe von x, von $+\infty$ an bis zu $-\infty$ hin stetig abnehmend gedacht werden).

Ist dagegen $n^2-3p = 0$, so gibt es zwar unter den reelen Werthen von x einen einzigen, nämlich $\alpha = -\frac{1}{3}n$, welcher ebenfalls $3\alpha^2+2n\alpha+p = 0$ macht, aber für diesen findet unter den Werthen von f_x kein Scheidepunkt statt, sondern es gehen diese von $+\infty$ bis $-\infty$ stetig und ununterbrochen mit x zugleich abnehmend fort.

Ist endlich n^2-3p negativ, so gibt es unter allen reelen Werthen von x keinen α, welcher $3\alpha^2+2n\alpha+p$ zu Null machen könnte, aber auch keinen, welcher $3\alpha^2+2n\alpha+p$ negativ machen

könnte (weil nach (§. §. 260. 261.) der Koeffizient von α^2 selbst negativ seyn müßte); also ist dann für jeden reelen Werth α von x, der Ausdruck $3\alpha^2+2n\alpha+p$ fortwährend positiv; also nehmen dann auch die Werthe von f_x mit denen von x, von $+\infty$ zu $-\infty$ hin ohne Unterbrechung stetig ab.

§. 286. Zusatz.

Aus diesen Untersuchungen geht aber nun sogleich folgendes hervor:

1) Da, während x von $+\infty$ bis zu $-\infty$ stetig abnehmend gedacht wird, die Werthe von f_x von $+\infty$ anfangen und mit $-\infty$ aufhören, aber dazwischen ebenfalls nur stetig sich ändern, so gehen sie nur durch Null hindurch in dem Moment, wo sie vom Positiven in das Negative oder vom Negativen in das Positive übergehen (wenn man den Ausnahmsfall nicht noch berücksichtigen will, wo der Null-Werth von f_x gerade der Scheidepunkt der Werthe ist). Daher kann es nur einen einzigen oder es muß drey reele Werthe von x geben, welche der Gleichung

$$x^3+nx^2+px+q = 0$$

genügen. Denn die Werthe von f_x nehmen entweder von $+\infty$ bis zu $-\infty$ ohne Unterbrechung ab (wenn n^2-3p negativ oder 0 ist), oder haben zwey Scheidepunkte (wenn n^2-3p positiv ist), in welchem letztern Falle 3 Unterfälle stecken:

1.1.) entweder es gehen die Werthe von f_x, von $+\infty$ stetig abnehmend bis zur positiven Zahl $+z$ fort, kehren dann bis zu einer größern positiven Zahl wachsend zurück, um dann von da ab ohne Aufhören abnehmend (einmal durch Null hindurch) bis zu $-\infty$ fortzugehen;

2.2.) oder sie gehen von $+\infty$ bis zur negativen Zahl $-z$ fort, kehren dann bis zu einer größern negativen Zahl (die absolut genommen kleiner als z ist) wachsend zurück, um dann wieder ohne Aufhören bis zu $-\infty$ hin abzunehmen; in diesem Falle gehen sie ebenfalls nur einmal durch Null hindurch;

3.3.) oder endlich sie nehmen von $+\infty$ bis zur negativen Zahl $-z$ ab, wachsen dann, bis zur positiven Zahl $+v$ zurückkehrend, um von da ab fortwährend und bis zu $-\infty$ hin wiederum stetig abzunehmen; und in diesem letztern Fall gehen sie offenbar 3 mal durch 0 hindurch.

§. 287. Zusatz.

Es bleibt uns nun noch zu untersuchen, wie die Koeffizienten n, p, q, beschaffen seyn müssen, wenn

$$f_x \text{ oder } x^3+nx^2+px+q$$

durch drey der reelen Werthe von x zu Null gemacht wird.

Wir haben aber erstlich gesehen, daß dazu n^2-3p nothwendig positiv seyn muß. Um nun die weitern Bedingungen zu finden, müssen wir die beyden Scheidepunkte bestimmen, d. h. die Werthe von $f_{(\alpha_1)}$ und $f_{(\alpha_2)}$, welche zu

$$x=\alpha_1=\frac{-n+\sqrt{n^2-3p}}{3} \text{ und zu } x=\alpha_2=\frac{-n-\sqrt{n^2-3p}}{3}$$

gehören. Substituirt man aber diese Werthe von x in f_x, so erhält man

$$f_{(\alpha_1)}=\frac{27q+2n^3-9np-2(n^2-3p)\sqrt{n^2-3p}}{27}$$

$$\text{und } f_{(\alpha_2)}=\frac{27q+2n^3-9np+2(n^2-3p)\sqrt{n^2-3p}}{27},$$

wo die Wurzel ihren absoluten Werth vorstellt. Und es finden also nach (§. 286. Nr. 3.3.), nur dann drey reele Werthe von x statt, wenn $f_{(\alpha_1)}$ negativ und zugleich $f_{(\alpha_2)}$ positiv d. h. wenn

$$\pm 2(n^2-3p)\sqrt{n^2-3p} > \pm(2n^3-9np+27q)$$

oder, wenn man auf beyden Seiten die Quadrate nimmt, wenn

$$4(n^2-3p)^3 > (2n^3-9np+27q)^2 \text{ ist.}$$

Ist also 1) n^2-3p positiv

und 2) $4(n^2-3p)^3 > (2n^3-9np+27q)^2$,

so sind die 3 Werthe von x, welche der Gleichung

$$x^3+nx^2+px+q=0$$

genügen, alle 3e reel. — Findet aber eine dieser beyden Bedin-

gungen (1. oder 2.) nicht statt, so ist von den 3 Werthen von x, welche die Gleichung

$$x^3+nx^2+px+q = 0$$

identisch machen, nur ein einziger reel, und natürlich sind dann die beyden andern imaginär.

Wendet man dies auf den speziellen Fall an, wo $n = 0$ ist, so findet man:

wenn 1) p negativ ist, und

wenn 2) $-4p^3 > 27q^2$ d. h. $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ ebenfalls negativ ist, so gibt die Gleichung

$$x^3+px+q = 0$$

drey reele Werthe von x; wenn aber eine dieser beyden Bedingungen nicht statt findet, so hat dieselbe Gleichung nur einen einzigen reelen und zwey imaginäre Werthe von x, welche ihr genügen.

Dabey ist jedoch nicht zu übersehen, daß wenn p Null oder positiv ist, dann die 2te Bedingung nie statt haben kann, weil $\frac{1}{4}q^2$ immer positiv seyn wird, so daß also auch umgekehrt, so oft die Gleichung

$$x^3+px+q = 0$$

nur einen einzigen reelen Werth von x liefert, die Bedingung (2.), daß nämlich $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ negativ ist, nie statt haben kann.

So oft also diese kubische Gleichung nur einen einzigen reelen Werth für x liefert, so oft ist $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ Null oder positiv, so oft befindet sich also die Cardan'sche Formel nicht in dem irreducktiblen Fall, während sie sich allemal in diesem Falle befindet, so oft die 3 Werthe von x, welche der gegebenen kubischen Gleichung $x^3+px+q = 0$ genügen, alle reel sind. (Vgl. §. 275. Anmerkung.).

§. 288. Zusatz.

Sind in der kubischen Gleichung

1) $x^3+nx^2+px+q = 0$,

die Koeffizienten reel; und ist α ein reeler Werth von x, welcher die (1.) identisch macht, so darf man nur den Ausdruck

$$x^3+nx^2+px+q$$

durch $x-\alpha$ dividiren, und den Quotienten

$$2)\ x^2+\beta x+\gamma, = 0$$

setzen, wo β, γ ebenfalls reel seyn müssen, weil sie ohne Wurzelung erhalten werden; und diese quadratische Gleichung (2.) gibt dann, nach x aufgelöst, die beyden andern Werthe von x, welche die (1.) identisch machen, nach (§. 278.).

Daraus folgt aber der höchstwichtige Satz: daß wenn diese beyden andern Werthe von x imaginär sind, sie allemal auf die Formen

$$P+Q\sqrt{-1}$$

und $$P-Q\sqrt{-1}$$

gebracht werden, also nie einander gleich seyn können (nach §. 243.).

§. 289. Zusatz.

Betrachten wir nun noch den (§. 286.) erwähnten Ausnahmsfall, wenn nämlich einer der Werthe α_1 oder α_2 von x,

d. h. $\alpha_1 = \frac{-n+\sqrt{n^2-3p}}{3}$ oder $\alpha_2 = \frac{-n-\sqrt{n^2-3p}}{3}$,

zu gleicher Zeit auch

$f_\alpha = 0$ macht, wo

dann f_x nur zweymal 0 wird, d. h. nur für zwey reele Werthe von x, nämlich für $x = \alpha_1$ oder $x = \alpha_2$ und für noch einen zweyten $x = \beta$.

Betrachten wir diesen Fall zuerst wenn $n = 0$ ist, so hat man dasmal

$$1)\ \alpha = \frac{\sqrt{-3p}}{3} \quad \text{oder} \quad 3\alpha^2+p = 0$$

und zugleich 2) $\alpha^3+p\alpha+q = 0$,

d. h. wenn man den Werth von α aus (1.) in (2.) substituirt:

3) $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3 = 0$;

folglich sind nach (§. §. 272—274.) die 3 Werthe von x, welche der Gleichung

$$x^3+px^2+q = 0 \quad \text{genügen,}$$

jetzt

$$x = 2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}$$

$$\text{oder } x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}\cdot(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}\cdot(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

$$\text{oder } x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}\cdot(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}\cdot(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}),$$

unter der $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q}$ den einzigen reelen Werth dieser Kubikwurzel verstanden; und man sieht leicht, daß diese letztern beyden Werthe von x dasmal einander gleich sind und ebenfalls reel werden, weil sie beyde in

$$-\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}$$

zusammenfallen.

Ist aber n nicht 0, so daß man noch die allgemeine kubische Gleichung

$$x^3+nx^2+px+q = 0$$

hat, so kann man auch so schließen:

Da jetzt offenbar nur zwey reele Werthe existiren, $x=\alpha$ und $x = \beta$, welche x^3+nx^2+px+q zu Null machen, so sind die zwey der 3 Faktoren $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)$, in welche der Ausdruck x^3+nx^2+px+q zerlegt werden kann, offenbar reel; aber weil $\alpha+\beta+\gamma = -n$, also $\gamma = -n-(\alpha+\beta)$ ist (nach §. 281.), so ist dann auch γ reel, und weil dann 3 verschiedene reele Werthe α, β und γ existiren würden, welche

$$x^3+nx^2+px+q = 0$$

identisch machen, dasmal aber nur zwey solche Werthe existiren, so muß dasmal γ einem der beyden andern Werthe α oder β gleich seyn, und es würde nicht schwer werden, wenn solches

nicht schon aus den vorhergehenden Betrachtungen folgerte, noch besonders nachzuweisen, daß $\gamma = \alpha$ seyn muß. *)

In diesem Falle, wo ebenfalls keiner der Werthe von x, welche

$$x^3 + nx^2 + px + q = 0$$

identisch machen, imaginär ist, kann man daher noch immer sagen, daß alle 3 Werthe von x reel sind, nur zwey davon einander gleich.

Anmerkung. Auch können alle 3 Werthe von x einander gleich werden. Dies ist der Fall, wenn $x^3 + nx^2 + px + q$ sich auf die Form $(x + \frac{1}{3}n)^3$ bringen läßt, also wenn $\frac{1}{3}n^2 = p$ und $\frac{1}{27}n^3 = q$, also $n^2 - 3p = 0$ und $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3} = -\frac{1}{3}n\sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}$ und dabey $x = -\frac{1}{3}n$ ist. — Die beyden Werthe α von x, welche die Scheidepunkte f_α bilden, sind dasmal einander gleich und $= -\frac{1}{3}n$, sind also dieselben, welche zugleich f_α selbst zu Null machen, und solches gehört zu dem Fall, welcher (§. 285. V.) beobachtet worden ist.

§. 290. Zusatz.

Es bleibt uns nun noch übrig zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die reelen, der Gleichung $f_x = 0$. d. h.

$$x^3 + nx^2 + px + q = 0$$

entsprechenden Werthe von x, positiv oder negativ seyn werden.

1) Gesetzt es sey nur einer der Werthe von x reel, die beyden andern imaginär, so wird für $x = 0$ offenbar $f_x = q$. Ist nun q positiv, so liegt zwischen $x = +\infty$ und $x = 0$ keiner der Werthe von x, welcher $f_x = 0$ machte; der reele Werth von x, welcher $f_x = 0$ macht, ist also dann negativ. Ist aber q negativ, so ist der reele Werth von x, welcher $f_x = 0$ macht, nothwendig positiv.

---

*) Wenn $f_{(\alpha_1)}$ negativ, aber bereits ganz nahe der Null wäre, so würden, wenn $f_{(\alpha_2)}$ wieder positiv ist, drey reele Werthe für x existiren α, γ, und β, von denen jedoch α und γ, sehr wenig von einander verschieden seyn könnten, weil α_1 zwischen beyden und dabey sehr nahe an beyden liegen müßte. So wie man sich nun $f_{(\alpha_1)}$ der Null immer näher gerückt denkt, so rücken α und γ dem α_1 immer näher; und so ist anschaulich, wie zuletzt α und γ mit α_1 zusammenfallen müssen.

2) Sind aber alle 3 Werthe von x, welche $f_x = 0$ machen, reel, so sind zwey dieser 3 Werthe von x positiv, der 3te negativ, wenn q positiv ist, und wenn dabey die beyden Werthe α_1 und α_2 von α, aus der Gleichung

$$3\alpha^2 + 2n\alpha + p = 0,$$

nicht alle beyde zugleich negativ sind; es ist aber einer nur positiv und die beyden andern sind dann negativ, wenn q negativ ist, und wenn die gedachten Werthe von α, nicht beyde zugleich positiv sind.

Dagegen sind alle 3 Werthe von x positiv, wenn q negativ ist, und wenn die beyden Werthe von α zugleich positiv sind, während die 3 Werthe von x negativ seyn werden, so oft q positiv ist, und die gedachten beyden Werthe von α beyde zugleich negativ sind.

Die Richtigkeit dieser letztern Behauptungen erhellet eben aus dem Umstand, daß jetzt f_x von $+\infty$ an bis zum negativen $f_{(\alpha_1)}$ abnimmt, dann von $f_{(\alpha_1)}$ bis zum positiven $f_{(\alpha_2)}$ wieder zunimmt, und von da an wieder abnimmt bis zu $-\infty$ hin, daß also von den 3 reelen Werthen von x, welche f_x zu Null machen, der größeste zwischen $+\infty$ und α_1, der nächste zwischen α_1 und α_2, und der kleinste zwischen α_2 und $-\infty$ liegen muß, während $f_x = q$ wird, so oft man $x = 0$ nimmt.

Schluß-Anmerkung.

Wenn für $x = \mu$, f_x positiv, und für $x = \nu$, f_x negativ wird, so liegt nothwendig zwischen μ und ν ein Werth von x, welcher $f_x = 0$ macht; weil die Werthe von f_x, während die von x zwischen μ und ν stetig fortgehend gedacht werden, selber nur stetig sich ändern, also nur stetig vom Positiven zum Negativen übergehen können, so daß in dem Moment des Uebergehens ein Nullwerth von f_x vorhanden seyn muß. — Diese Betrachtung gibt ein Mittel ab, indem man zwischen μ und ν immer zwey Werthe nimmt, welche näher und näher an einander liegen, und für welche f_x einmal positiv, ein andermal negativ wird, dem Werth von x, welcher $f_x = 0$ macht, sich immer mehr zu nähern. — Weil aber dieses alles in der Lehre der höhern Gleichungen überhaupt noch vorkommt, so mag hier diese kurze Andeutung vorläufig genügen.

Zahlenlehre.

Zwölftes Kapitel.

Von den Ausdrücken von der Form $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$. Von den Werthen von x, welche sie = Null machen. Von der allgemeinen Biquadrat=Wurzel *). Von der Auflösung derjenigen Gleichungen mit mehr Unbekannten, welche zu biquadratischen Gleichungen mit einem Unbekannten führen.

Erste Abtheilung.

Von der Auflösung der biquadratischen Gleichung. Von der allgemeinen Biquadrat=Wurzel.

§. 291. Aufgabe.

Die reine biquadratische Gleichung

$$1)\quad x^4 = a$$

nach dem Unbekannten x aufzulösen.

Auflösung I. Ist a eine absolute Zahl, und $\sqrt[4]{a}$ ihre absolute Wurzel, so läßt sich die Gleichung (1.) auch so schreiben

*) Biquadrat=Wurzel heißt so viel als vierte Wurzel.

$$2)\ x^4 = (\sqrt[4]{a})^4. \quad \text{oder} \quad x^4 - (\sqrt[4]{a})^4 = 0$$

oder $$3)\ [x^2 - (\sqrt[4]{a})^2] \cdot [x^2 + (\sqrt[4]{a})^2] = 0$$ *).

Diese Gleichung macht aber jeder Werth von x identisch, welcher einen der beyden Faktoren links identisch zu Null, also welcher

$$4)\ x^2 - (\sqrt[4]{a})^2 = 0 \quad \text{oder} \quad 5)\ x^2 + (\sqrt[4]{a})^2 = 0$$

macht. — Aus (4.) erhält man

$$6)\ x = +\sqrt[4]{a} \quad \text{und} \quad 7)\ x = -\sqrt[4]{a},$$

während die (5.) gibt

$$x = +\sqrt{-(\sqrt[4]{a})^2} \quad \text{und} \quad x = -\sqrt{-(\sqrt[4]{a})^2}$$

d. h. $$8)\ x = +\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{-1} \text{ und } 9)\ x = -\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{-1}$$ **).

Es hat also dann x genau 4 verschiedene Werthe, einen positiven, einen negativen und zwey imaginäre; und, wie man sich leicht überzeugt, auch nie mehr als diese 4 Werthe. (Vgl. §. 234. und §. 266.).

Es gibt also dann diese 4 verschiedenen Ausdrücke, von denen jeder die Eigenschaft mit dem andern gemein hat, daß wenn er mit 4 potenzirt wird, jedesmal ein und dasselbe Resultat, nämlich a, sich ergibt.

§. 292. Erklärung.

Damit aber eine allgemeine Auflösung dieser Aufgabe möglich werde, müssen wir, wenn a noch ganz allgemein ist, unter dem Zeichen $\sqrt[4]{a}$ einen Ausdruck (eine Rechnungsform) uns denken, dessen Wesen bloß in der Eigenschaft besteht, daß er mit 4 potenzirt, a wiedergibt. — Dies mag die allgemeine 4te Wurzel heißen. (Vgl. §. 235. und §. 267.).

---

*) Weil $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, und
$x^4 - p^4 = (x^2)^2 - (p^2)^2 = (x^2-p^2)(x^2+p^2)$ ist.

**) Weil $\sqrt{-\alpha^2} = \sqrt{\alpha^2(-1)} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{-1} = \alpha \cdot \sqrt{-1}$ ist.

§. 293. Zusatz.

Eine solche allgemeine 4te Wurzel muß im Allgemeinen schon als vierdeutig angesehen und behandelt werden, weil sie im Besondern 4 verschiedene Werthe wirklich hat, d. h. weil es im Besondern wirklich 4 frühere, einander nicht gleiche, spezielle Zahlformen gibt, die diese, unter $\sqrt[4]{a}$ vorgestellte Eigenschaft mit einander gemein haben.

Es muß also namentlich bey dem Arbeiten mit solchen Ausdrücken wie $\sqrt[4]{a}$, diejenige Vorsicht angewandt werden, welche bey mehrdeutigen Ausdrücken immer zu beobachten ist, und welche in den (§. §. 238. 268. 270.) näher beschrieben sich findet.

§. 294. Zusatz.

In Bezug auf das wichtige Ableiten der Gleichungen nach (§. 150.) findet sich:

α) Es ist allemal noch

$$(\sqrt[4]{a})^4 = a,$$

welcher der 4 Werthe unter $\sqrt[4]{a}$ auch immer gedacht werden mag;

dagegen ist $$\sqrt[4]{(a^4)} = a$$

nur unter der Voraussetzung, daß $\sqrt[4]{(a^4)}$ nicht jedweden ihrer 4 Werthe vorstellt, sondern nur den einzigen a, weil nur dann die gedachte Gleichung $a = a$ und identisch ist.

β) Wenn $a = b$, so ist nur dann auch $\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b}$, wenn statt jede dieser 4ten Wurzeln nicht jeder beliebige ihrer 4 Werthe gesetzt wird. —

γ) Das Ableiten der Gleichungen nach (§. 150.), mithin auch die Formeln der Wurzeln der (§. 136. und §. 149.) finden demnach noch in Bezug auf diese allgemeinen 4ten Wurzeln statt, jedoch nur mit der Einschränkung, daß in den entstehenden Gleichungen für eine vorkommende 4te Wurzel nicht geradezu jedweder ihrer Werthe gesetzt werde, sondern daß man in den speziellen An-

wendungen zuvor jedesmal noch untersuche, welcher ihrer 4 Werthe hier gerade dafür zu setzen seyn dürfte. Vgl. (§. 270.) und die Note dazu.

§. 295. Zusatz.

Nun ist aber die allgemeine Auflösung der Gleichung

$$x^4 = a$$

möglich, in so ferne die 4 Werthe von x sind:

$$x = +\sqrt[4]{a},\quad x = -\sqrt[4]{a},\quad x = +\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{-1},\quad x = -\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{-1},$$

wo $\sqrt[4]{a}$ durchaus einen beliebigen, aber einen und denselben ihrer Werthe vorstellt.

Jede dieser 4 Formen hat die Eigenschaft, daß sie mit 4 potenzirt, a wiedergibt.

§. 296. Zusatz.

Die 4 Werthe von $\sqrt[4]{1}$ sind demnach, weil einer davon 1 selber ist,

$$+1,\quad -1,\quad +\sqrt{-1},\quad -\sqrt{-1}.$$

Und die 4 Werthe von $\sqrt[4]{a}$ erhält man also, wenn man einen derselben nach und nach mit diesen 4 Werthen von $\sqrt[4]{1}$ multiplizirt.

§. 297. Aufgabe.

Die allgemeine Gleichung vom 4ten Grade

1) $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

nach x aufzulösen.

Auflösung. Man verwandle sie zuerst in eine einfachere; setze zu dem Ende $z + h$ statt x, und erhält:

2) $z^4 + (4h + a)z^3 + (6h^2 + 3ah + b)z^2$
$+ (4h^3 + 3ah^2 + 2bh + c)z + (h^4 + ah^3 + bh^2 + ch + d) = 0$

oder

3) $z^4 + pz^2 + qz + r = 0,$

wenn h so genommen wird, daß

4) $4h+a = 0$ d. h. $h = -\frac{1}{4}a$

ist, und wenn man

5) $6h^2+3ah+b$ d. h. $b-\frac{3}{8}a^2$ durch p,

6) $4h^3+3ah^2+2bh+c$ d. h. $c-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}a^3$ durch q,

7) $h^4+ah^3+bh^2+ch+d$ d. h. $d-\frac{1}{4}ac+\frac{1}{16}a^2b-\frac{3}{256}a^4$ durch r

bezeichnet.

Es bleibt nun noch die Gleichung (3.), nämlich

3) $z^4+pz^2+qz+r = 0$

nach z aufzulösen.

Zu dem Ende zerlege man zuerst

8) z^4+pz^2+qz+r

für jeden Werth von z (also nicht gerade für denjenigen, welcher diesen Ausdruck zu Null macht, und welcher gesucht wird) in zwey Faktoren von der Form

9) $(z^2+\alpha z+\beta)(z^2+\gamma z+\delta)$.

Letzteres Produkt, wenn man wirklich multiplizirt gibt aber

10) $z^4+(\alpha+\gamma)z^3+(\alpha\gamma+\beta+\delta)z^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)z+\beta\delta$.

Und zieht man daher den Ausdruck (8.), der mit diesem identisch seyn soll, von letzterem ab, so ist die Differenz identisch Null, d. h.

11) $(\alpha+\gamma)z^3+(\alpha\gamma+\beta+\delta-p)z^2+(\alpha\delta+\beta\gamma-q)z$
$+(\beta\delta-r) = 0$

für jeden Werth von z; also auch nach (§. 277.):

12) $\alpha+\gamma = 0$,

13) $\alpha\gamma+\beta+\delta-p = 0$,

14) $\alpha\delta+\beta\gamma-q = 0$,

15) $\beta\delta-r = 0$;

woraus denn α, β, γ und δ gefunden werden müssen. — Man hat zu dem Ende aus (12.):

16) $\gamma = -\alpha$;

und dieser Werth von γ in (13. und 14.) gesetzt, gibt

17) $\delta+\beta = p+\alpha^2$ und

18) $\delta-\beta = \frac{q}{\alpha}$,

woraus sich sogleich

19) $\delta = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha^2 + p + \frac{q}{\alpha} \right)$

und

20) $\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha^2 + p - \frac{q}{\alpha} \right)$

ergibt. — Werden nun diese Werthe von β und δ in (15.) gesetzt, so ergibt sich

21) $(\alpha^2 + p)^2 - \frac{q^2}{\alpha^2} - 4r = 0,$

woraus

22) $(\alpha^2)^3 + 2p(\alpha^2)^2 + (p^2 - 4r)(\alpha^2) - q^2 = 0$

hervorgeht. *)

Diese Gleichung (22.) ist nun nach α^2 eine kubische, wird nach (§. 272.) aufgelöst, und gibt für α^2, 3 Werthe. Und weil jeder Werth μ von α^2, wieder die beyden Werthe $+\sqrt{\mu}$ und $-\sqrt{\mu}$ von α gibt; so hat α selbst 6 Werthe, die wir als bereits gefunden ansehen wollen.

Zu jedem der Werthe von α, liefern aber die Gleichungen (16. 19. und 20.) jedesmal einen einzigen Werth von γ, von β und von δ.

Es werden also 6 Parthien zusammengehöriger Werthe von α, β, γ, δ gefunden, so daß allemal

$$(z^2 + \alpha z + \beta) \cdot (z^2 + \gamma z + \delta) = z^4 + pz^2 + qz + r$$

wird.

---

*) Die Aufgabe war nämlich die: aus den Gleichunaen (12.—15.) γ, β und δ zu eliminiren, so daß bloß eine Endgleichung, nämlich die (22.) in α übrig bleibt, welche dann aufgelöst werden kann, und rückwärtsgehend auch γ, β und δ liefert. Zu dem Ende hat man zuerst γ durch die Substitutions-Methode, dann aber β und δ dadurch eliminirt, daß man aus den 2 neuen Gleichungen β und δ in α ausgedrückt gefunden und diese Werthe vollends in (15.) substituirt hat.

Ist aber dies geschehen, so findet man die gesuchten Werthe von z, wenn man diejenigen sucht, welche

entweder 23) $z^2+\alpha z+\beta = 0$

oder 24) $z^2+\gamma z+\delta = 0$

machen; und man findet daher nach (§. 242.)

$$z = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2} \text{ und } z = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-4\delta}}{2},$$

oder, wenn man für γ, β und δ ihre aus (16. 19. und 20.) genommenen Werthe setzt:

$$25)\ z = -\tfrac{1}{2}\alpha \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2-2p+\frac{2q}{\alpha}}$$

$$26)\ z = +\tfrac{1}{2}\alpha \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2-2p-\frac{2q}{\alpha}},$$

welche Gleichungen für jeden Werth von α, 4 Werthe von z, und dann, weil

$$x = z+h = -\tfrac{1}{4}a+z \text{ ist,}$$

auch 4 Werthe von x liefern.

Die Ausführung ist viel zu weitläufig, und die gefundene Endformel zu unbrauchbar, als daß hier mehr als die Möglichkeit der Auflösung gegeben werden sollte.

§. 298. Zusatz.

Da jeder Werth von α, für z 4 verschiedene Werthe liefert, so scheint z 24 Werthe haben zu können.

Weil aber $z^2+\alpha z+\beta$ selbst wieder in das Produkt

$$\left(z+\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2-2p+\frac{2q}{\alpha}}\right)\times\left(z+\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2-2p+\frac{2q}{\alpha}}\right);$$

und $z^2+\gamma z+\delta$ ebenfalls wieder in das Produkt

$$\left(z-\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2-2p-\frac{2q}{\alpha}}\right)\times\left(z-\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2-2p-\frac{2q}{\alpha}}\right)$$

zerlegt werden kann, so ist z^4+pz^2+qz+r das Produkt der 4 folgenden Faktoren

$$1)\ z+\tfrac{1}{2}\alpha_1-\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha_1^2-2p+\frac{2q}{\alpha_1}}$$

$$2)\ z+\tfrac{1}{2}\alpha_1+\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha_1^2-2p+\frac{2q}{\alpha_1}}$$

$$3)\ z-\tfrac{1}{2}\alpha_1-\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha_1^2-2p-\frac{2q}{\alpha_1}}$$

$$4)\ z-\tfrac{1}{2}\alpha_1+\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha_1^2-2p-\frac{2q}{\alpha_1}},$$

wenn α_1 einer der 6 Werthe von α ist. Multiplizirt man nun hier die Faktoren (1. und 2.), (1. und 3.), (1. und 4.), (2. und 3.), (2. und 4.), zuletzt (3. und 4.) mit einander, und dann jedesmal die beyden übrigen ebenfalls mit einander, so erhält man 6 Faktoren von der Form $z^2+\alpha z+\beta$ und 6 zugehörige von der Form $z^2+\gamma z+\delta$, so daß beyde letztern mit einander multiplizirt, allemal wieder z^4+pz^2+qz+r geben müssen.

Diese 4 Faktoren (1—4.) allein verursachen also, daß der Faktor $z^2+\alpha z+\beta$, 6 verschiedene Werthe, daß also α selbst 6 verschiedene Werthe hat. Und umgekehrt; da α nicht mehr als 6 verschiedene Werthe erhalten hat, aus der Gleichung (22. des §. 297.), und da jeder Faktor von der Form $z^2+\alpha z+\beta$ nur auf eine Art in zwey Faktoren von der Form $z+\varepsilon$ sich zerlegen läßt, so folgt daraus, daß z^4+pz^2+qz+r in keine andern Faktoren von der Form $z+\varepsilon$ zerfällt werden kann, als die (1.—4.) angegebenen, unter der Voraussetzung, daß in ihnen α_1 irgend einen einzigen der 6 Werthe von α vorstellt.

Wenn aber z^4+pz^2+qz+r sich nur auf eine einzige Art in 4 Faktoren von der Form $z+\varepsilon$ zerlegen läßt, so folgt ferner, daß jeder Werth von z, welcher diesen Ausdruck zu Null macht, einen der 4 Faktoren (1.—4.) zu Null machen müsse, daß also die Gleichung

$$z^4+pz^2+qz+r = 0,$$

und dann auch die andere

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

nicht mehr als 4 verschiedene Auflösungen zulassen werde, mithin daß z die (§. 297.) gefundenen 4 Werthe habe, wenn in ihnen für α irgend ein einziger seiner 6 Werthe gesetzt wird; und daß die dort gefundenen Ausdrücke

$$z=-\tfrac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{-\alpha^2-2p+\frac{2q}{\alpha}}$$

und

$$z=+\tfrac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{-\alpha^2-2p-\frac{2q}{\alpha}}$$

für jeden andern der 6 Werthe von α allemal dieselben 4 Werthe von z liefern, nur jedesmal in anderer Anordnung. *)

§. 299. Zusatz.

Auch erhellet noch folgendes:

1) Die Gleichuug (§. 297. Nr. 22.) gibt wenn a, b, c, d, also auch p, q und r reel sind, für α^2 (nach §. 290.) einen positiven Werth μ, also für α selbst zwey reele Werthe, $+\sqrt{\mu}$ und $-\sqrt{\mu}$, wovon jedoch, wenn der eine statt α genommen wird, der andere statt des dortigen γ genommen werden muß, weil $\alpha+\gamma=0$ ist.

---

*) Wenn α_1 einer der Werthe von α ist, so ist $-\alpha_1$ ein zweyter derselben, nach (§. 297.), und daß die 4 Werthe von z dieselben bleiben, man mag $+\alpha_1$ oder $-\alpha_1$ statt α setzen, fällt aus (25. und 26. des §. 297.) ohne weiteres auch noch à posteriori in die Augen.

Multiplizirt man ferner je zwey der 4 Faktoren (1—4. des §. 298.) mit einander, so daß das Produkt jedesmal die Form z^2+Pz+Q bekommt, und setzt man P statt α in die Gleichung (22. des §. 297.), so wird solche allemal identisch $0=0$. Mag man sich die Mühe geben, diese Rechnungen durchzuführen für die 6 Werthe, welche man nach und nach unter P zu verstehen hat, so hat man sich auch noch à posteriori überzeugt, daß die 6 Werthe von α aus (22. des §. 297.) keine andern einfachen Faktoren von der Form $z+\varepsilon$ geben können als die (1—4. des §. 298.), daß also die allgemeine biquadratische Gleichung nur 4 Auflösungen hat, die jedoch zum Theil oder alle auch einander gleich werden, und in dieser Hinsicht auch in eine geringere Anzahl verschiedener Werthe zusammenfallen können.

2) Es kann also

$$z^4+pz^2+qz+r$$

unter den 6 verschiedenen Arten, allemal auch in zwey Faktoren

$$z^2+\alpha z+\beta \quad \text{und} \quad z^2+\gamma z+\delta$$

zerlegt werden, in denen α, β, γ und δ reel sind.

3) Also sind von den 4 Werthen von x, welche

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d = 0$$

machen, und welche aus $x = -\frac{1}{4}a+z$ hervorgehen, während z aus

$$z^2+\alpha z+\beta = 0, \quad \text{oder aus} \quad z^2+\gamma z+\delta = 0$$

gefunden wird, entweder alle viere imaginär, oder nur zweye derselben imaginär; und jedes Paar dieser imaginären Werthe, kann immer auf die Form

$$P+Q\sqrt{-1}$$

und

$$P-Q\sqrt{-1}$$

gebracht werden, unter P und Q in beyden Ausdrücken dieselben reelen Werthe gedacht, so nämlich daß wenn einer der imaginären Werthe von x, $= P+Q\sqrt{-1}$ gefunden worden ist, dann $P-Q\sqrt{-1}$ ein zweyter Werth von x seyn muß.

§. 300. Aufgabe.

Es sind gegeben zwey Gleichungen der zweyten Ordnung

1) $a\,y^2+b\,xy+c\,x^2+d\,y+e\,x+f = 0$

und 2) $a_1y^2+b_1xy+c_1x^2+d_1y+e_1x+f_1 = 0$,

welche auch so geschrieben werden können

3) $a\,y^2+(b\,x+d\,)y+(c\,x^2+e\,x+f\,) = 0$

und 4) $a_1y^2+(b_1x+d_1)y+(c_1x^2+e_1x+f_1) = 0$,

oder auch so

5) $a\,y^2+P\,y+Q = 0$,

6) $a_1y^2+P_1y+Q_1 = 0$;

wenn 7) $bx+d$ durch P, b_1x+d_1 durch P_1,

und 8) cx^2+ex+f durch Q, $c_1x^2+e_1x+f_1$ durch Q_1

vorgestellt wird. Man soll solche nach x und nach y auflösen.

Auf=

Auflösung. Man finde aus (1. oder 5.)

$$9)\quad y = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4aQ}}{2a}.$$

Dieser Ausdruck statt y gesetzt, macht nun die Gleichung (1. oder 5.) identisch, die (2. oder 6.) dagegen übergehen in

$$10)\quad a_1 \frac{[-P \pm \sqrt{P^2 - 4aQ}]^2}{4a^2} + P_1 \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4aQ}}{2a} + Q_1 = 0$$

oder, wenn man bemerkt, daß nach (§. 249. Lehrs. 1.):

$$[-P \pm \sqrt{P^2 - 4aQ}]^2 = 2(P^2 - 2aQ) \mp 2P\sqrt{P^2 - 4aQ}$$

ist, und wenn man mit $2a^2$ wegmultiplizirt,

$$11)\quad a_1(P^2 - 2aQ) - aPP_1 + 2a^2Q_1 \pm (aP_1 - a_1P)\sqrt{P^2 - 4aQ} = 0,$$

welche Gleichung nun noch durch dazugehörige Werthe von x identisch gemacht werden muß. — Um aber diese Gleichung nach x zu ordnen, muß man vor allen Dingen $\sqrt{P^2 - 4aQ}$ fortschaffen, zu dem Ende das damit versehene Glied ganz allein auf die andere Seite bringen und dann auf beyden Seiten die Quadrate nehmen. Dies gibt

$$12)\quad [a_1(P^2 - 2aQ) - aPP_1 + 2a^2Q_1]^2 = (aP_1 - a_1P)^2(P^2 - 4aQ);$$

und diese Gleichung vollends nach x geordnet, wird:

$$\begin{aligned}13)\quad & [(a_1c - ac_1)^2 - (a_1b - ab_1)(b_1c - bc_1)]x^4 \\ & + [2(a_1c - ac_1)(a_1e - ae_1) - (a_1d - ad_1)(b_1c - bc_1) \\ & \qquad - (a_1b - ab_1)(b_1e - be_1 + cd_1 - c_1d)]x^3 \\ & + [(a_1e - ae_1)^2 + 2(a_1c - ac_1)(a_1f - af_1) \\ & \qquad - (a_1d - ad_1)(b_1e - be_1 + cd_1 - c_1d) \\ & \qquad - (a_1b - ab_1)(b_1f - bf_1 + d_1e - de_1)]x^2 \\ & + [2(a_1e - ae_1)(a_1f - af_1) - (a_1d - ad_1)(b_1f - bf_1 + d_1e - de_1) \\ & \qquad - (a_1b - ab_1)(d_1f - df_1)]x \\ & + [(a_1f - af_1)^2 - (a_1d - ad_1)(d_1f - df_1)] = 0,\end{aligned}$$

welche, wie man sieht, vom 4ten Grade ist, also nach (§. 297.) ihre Auflösung findet und für x, vier Werthe liefert.

Hat man aber die 4 Werthe von x gefunden, welche die Gleichung (13.) identisch machen, so setze man jeden dieser Werthe von x in die (9.) statt x, und findet dazu aus (9.) jedesmal zwey Werthe von y; und es entsteht nun die Frage, welcher dieser beyden Werthe von y; ist der zu diesem x gehörige wahre Werth? — Offenbar allemal derjenige, welcher für denselben Werth von x, nicht bloß die (1.) sondern auch die (2.) identisch macht, weil gerade unsere Aufgabe verlangt, daß die (1. und 2.) zugleich identisch werden sollen. Man wird also jeden der Werthe von x, wie sie sich aus (13.) ergeben, nicht bloß in (3. oder 1.) setzen, sondern auch in (2.), und denjenigen Werth von y dazu suchen, welcher für diesen Werth von x, die Gleichungen (1. und 2.) oder (5. und 6.) zugleich identisch macht.

Diesen Werth von y kann man aber auf verschiedenen Wegen finden. Man kann z. B. jede der Gleichungen (1. und 2.) oder (5. und 6.), nachdem der Werth von x in beyden statt x, gesetzt worden ist, nach y auflösen; erhält aus jeder für y, zwey Werthe; und man nimmt dann den, beyden gemeinschaftlichen Werth von y für den wahren. —

Man kann aber auch, nachdem in den Gleichungen (1. und 2.) oder (5. und 6.) derselbe aus (13.) gefundene Werth von x statt x gesetzt worden ist, aus diesen Gleichungen (5. und 6.) nämlich aus

$$5)\ ay^2+Py+Q=0 \quad \text{und} \quad 6)\ a_1y^2+P_1y+Q_1=0,$$

y als denselben (beyden Gleichungen gemeinschaftlichen) Werth ansehend, y^2 elimininen, und die Eliminationsgleichung

$$(a_1P-aP_1)y+(a_1Q-aQ_1)=0,$$

die nur noch nach y vom ersten Grade ist, vollends nach y auflösen, so wird man gerade den Werth von y erhalten, der beyden Gleichungen gemeinschaftlich ist.

Endlich kann man sich auch

$$ay^2+Py+Q \quad \text{und} \quad a_1y^2+P_1y+Q_1$$

in ihre beyden Faktoren zerlegt denken, den erstern in $a(y-\alpha)(y-\beta)$ den andern in $a_1(y-\alpha)(y-\delta)$, und den gemeinschaftlichen Faktor $y-\alpha$, $= 0$ nehmen, weil dies den Werth von y gibt, welcher beyde Gleichungen (5. und 6.) auf einmal zu Null macht. — *) Diesen gemeinschaftlichen Faktor $y-\alpha$ kann man aber, wie später im zweyten Theile dieses Lehrbuches gezeigt wird, direkt finden, ohne die vorhin besprochene Zerlegung in Faktoren wirklich vornehmen zu müssen.

Anmerkung. Unter den 4 Werthen von x, welche aus (13.) des (§. 300.) erhalten werden, sind zweye, welche die Gleichung (11.) des (§. 300.) dann identisch machen, wenn man $+\sqrt{P^2-4aQ}$ nimmt; zu jedem dieser Werthe von x gehört der Werth $y = \frac{-P+\sqrt{P^2-4aQ}}{2a}$; und die beyden andern aus (13.) erhaltenen Werthe von x, machen die (11.) nur dann identisch, wenn man $-\sqrt{P^2-4aQ}$ nimmt; zu diesem Werthe von x, gehört dann der Werth $y = \frac{-P-\sqrt{P^2-4aQ}}{2a}$.

§. 301. Zusatz.

Auch bey der Auflösung des (§. 300.) kam alles wieder zunächst darauf an, den Unbekannten y aus beyden Gleichungen

1) $a\,y^2+b\,xy+c\,x^2+d\,y+e\,x+f = 0$

und 2) $a_1y^2+b_1xy+c_1x^2+d_1y+e_1x+f_1 = 0$

zu eliminiren oder wegzuschaffen. Dort (§. 300.) wurde die Substitutionsmethode angewandt. Wollte man die Kombinationsmethode versuchen, y aus beyden Gleichungen (1. und 2.) finden, und die Werthe einander gleich setzen, so bekam man eine Gleichung von der Form

---

*) Da man in der Auflösung den aus (1.) für y gefundenen Ausdruck in x, statt y in (2.) gesetzt hat, so hat man gerade dadurch vorausgesetzt, daß beyde Gleichungen (1. und 2.) für jeden aus (13.) gefundenen Werth von x, einen und denselben Werth von y haben müssen; daß daher beyde Ausdrücke

$$y^2+\frac{P}{a}y+\frac{Q}{a} \quad \text{und} \quad y^2+\frac{P_1}{a_1}y+\frac{Q_1}{a_1},$$

auch nothwendig einen gemeinschaftlichen Faktor $y-\alpha$ haben.

$$3)\quad \frac{A \pm \sqrt{B}}{2a} = \frac{A_1 \pm \sqrt{B_1}}{2a_1}$$

als Eliminationsgleichung, wo

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \\ A_1 \\ B_1 \end{matrix}\right\} \text{die Ausdrücke} \begin{cases} -(bx+d), \\ (b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+(d^2-4af), \\ -(b_1x+d_1), \\ (b_1{}^2-4a_1c_1)x^2+2(b_1d_1-2a_1e_1)x+(d_1{}^2-4a_1f_1), \end{cases}$$

vorstellen. Dann aber mußten beyde Wurzeln $\sqrt{B}$ und $\sqrt{B_1}$ herausgebracht werden, wenn die Eliminationsgleichung selbst als eine nach x geordnete, erscheinen sollte. Dies Wegschaffen der Wurzeln konnte nun ohngefähr so bewerkstelligt werden. Erstlich bringt man die Gleichung (3.) auf die Form

$$2a_1A-2aA_1 = \pm 2a\sqrt{B_1} \mp 2a_1\sqrt{B},$$

und nimmt auf beyden Seiten die Quadrate; so erhält man

$$(2a_1A-2aA_1)^2 = (4a^2B_1+4a_1{}^2B) \pm 8aa_1\sqrt{B \cdot B_1}$$

oder, wenn man das Glied mit der Wurzel allein stellt,

$$(2a_1A-2aA_1)^2-(4a^2B_1+4a_1{}^2B) = \pm 8aa_1\sqrt{B \cdot B_1}\ .$$

Nimmt man nun hier wieder auf beyden Seiten die Quadrate, so fällt auch diese Wurzel zur Rechten noch weg, und man hat

$$[(2a_1A-2aA_1)^2-(4a^2B_1+4a_1{}^2B)]^2 = 64a^2 \cdot a_1{}^2 \cdot B \cdot B_1,$$

welches wiederum, wenn man wirklich quadrirt und für A und B und A_1 und B_1 die durch sie bezeichneten Ausdrücke in x setzt, auch die entstehende Gleichung vollends nach x ordnet, zu der Gleichung (13.) des (§. 300.) führt.

§. 302. Zusatz.

Wollte man aber, um aus den beyden Gleichungen

$$1)\quad a\,y^2+b\,xy+c\,x^2+d\,y+e\,x+f = 0$$
$$2)\quad a_1y^2+b_1xy+c_1x^2+d_1y+e_1x+f_1 = 0$$

den Unbekannten y zu eliminiren, die englische Methode anwenden, so müßte man aus beyden zuerst y^2 eliminiren, indem die erstere mit a_1, die zweyte mit a multiplizirt, und dann die beyden neuen Gleichungen von einander subtrahirt würden. Man wird jedoch

am besten thun die Gleichungen (1. und 2.) selbst vorher so zu schreiben

1) $a\,y^2+(b\,x+d\,)y+(c\,x^2+e\,x+f\,)=0$

2) $a_1y^2+(b_1x+d_1)y+(c_1x^2+e_1x+f_1)=0$;

und die neue Gleichung wird nun werden

3) $[(a_1b-ab_1)x+(a_1d-ad_1)]y$
$+[(a_1c-ac_1)x^2+(a_1e-ae_1)x+(a_1f-af_1)]=0.$

Und nun eliminirt man y aus (3. und 1.) oder aus (3. und 2.), wie solches für diesen Fall bereits gezeigt worden ist; und man erhält dieselbe Eliminationsgleichung (13.) des (§. 300.).

Anmerkung. Man könnte auch, nachdem man durch Elimination von y^2 die Gleichung (3.) erhalten hat, aus beyden Gleichungen (1. und 2.) noch das Glied eliminiren, welches y gar nicht enthält; zu dem Ende die erste Gleichung mit $c_1x^2+e_1x+f_1$, die andere dagegen mit cx^2+ex+f multipliziren und dann die entstehenden Gleichungen von einander subtrahiren, endlich das Resultat durch y wegdividiren; und man erhielte:

4) $[(ac_1-a_1c)x^2+(ae_1-a_1e)x+(af_1-a_1f)]y$
$+[(bc_1-b_1c)x^3+(be_1-b_1e+c_1d-cd_1)x^2+(bf_1-b_1f$
$+de_1-d_1e)x+(df_1-d_1f)]=0.$

Die Gleichungen (3. und 4.) sind nun beyde, nach y, einfache Gleichungen und y nach (§. 223.) sogleich daraus zu eliminiren. Immer erhält man dieselbe Eliminationsgleichung (13. §. 300,) vom 4ten Grade nach x.

§. 303. Zusatz.

Wollte man zur Elimination des y, aus den Gleichungen

1) $a\,y^2+b\,xy+c\,x^2+d\,y+e\,x+f\,=0$

2) $a_1y^2+b_1xy+c_1x^2+d_1y+e_1x+f_1=0$

sich der französischen Methode bedienen, so könnte man dies auf nachstehende Art bewerkstelligen:

Man schreibe die gegebenen Gleichungen zuerst so:

3) $a\,y^2+(b\,x+d\,)y+(c\,x^2+e\,x+f\,)=0$

4) $a_1y^2+(b_1x+d_1)y+(c_1x^2+e_1x+f_1)=0$;

multiplizire dann die erste mit $\mu y+\nu$, die andere mit $\mu_1 y+\nu_1$, addire beyde Resultate, und setze in dieser neuen Gleichung die

Koeffizienten von y^3, y^2 und y der Null gleich, so wird man μ oder μ_1 beliebig annehmen können (ohne x); μ_1 oder μ, so wie ν_1 und ν (letztere beyden in x) werden sich dem gemäß bestimmen lassen, und die nun übrige Gleichung ist die gesuchte Eliminationsgleichung. — Man erhält aber auf diesem Wege zunächst:

$$5)\ (\mu a+\mu_1 a_1)y^3+[\mu(bx+d)+\nu a+\mu_1(b_1x+d_1)+\nu_1 a_1]y^2$$
$$+[\mu(cx^2+ex+f)+\nu(bx+d)+\mu_1(c_1x^2+e_1x+f_1)$$
$$+\nu_1(b_1x+d_1)]y$$
$$+\nu(cx^2+ex+f)+\nu_1(c_1x^2+e_1x+f_1)=0.$$

Setzt man also nun

$$6)\ \mu a+\mu_1 a_1=0$$

$$7)\ \mu(bx+d)+\nu a+\mu_1(b_1x+d_1)+\nu_1 a_1=0$$

$$8)\ \mu(cx^2+ex+f)+\nu(bx+d)+\mu_1(c_1x^2+e_1x+f_1)$$
$$+\nu_1(b_1x+d_1)=0,$$

so kann man $\mu=a_1$ *) nehmen, und dann ist $\mu_1=-a$, und ν und ν_1 sind bestimmt durch die Gleichungen

$$9)\ a\nu+a_1\nu_1+[(a\ b-ab_1)x+(a_1d-ad_1)]=0$$

und

$$10)\ (bx+d)\nu+(b_1x+d_1)\nu_1+[(a_1c-ac_1)x^2+(a_1e-ae_1)x$$
$$+(a_1f-af_1)]=0,$$

welche nach ν und ν_1, dem (§. 219.) zu Folge, aufgelöst werden können.

Und setzt man zuletzt diese Werthe von ν und ν_1 in (5.) d. h. wegen (6—9.), in

$$\nu\cdot(cx^2+ex+f)+\nu_1\cdot(c_1x^2+e_1x+f_1)=0,$$

so hat man die gesuchte Eliminationsgleichung, welche wiederum die Gleichung (13.) des (§. 300.) ist.

---

*) Man hat zur Bestimmung der 4 unbestimmten μ, μ_1, ν, ν_1 nur 3 Gleichungen, so daß μ oder μ_1 unbestimmt bleibt und beliebig genommen werden kann. Man kann also eben so gut auch $\mu=1$ nehmen, so daß dann $\mu_1=-\frac{a}{a_1}$ wird. Um aber die Bruchformen möglichst zu vermeiden, hat man oben $\mu=a_1$ genommen wo dann $\mu_1=-a$ wird.

§. 301. Zusatz.

Es gibt aber noch eine Art des Eliminirens, welche bey höhern, und also auch bey den hier vorliegenden Gleichungen der zweyten Ordnung mit Vortheil angewandt wird. — Denkt man sich nämlich die beyden gegebenen Gleichungen

$$a\,y^2+b\,xy+c\,x^2+d\,y+e\,x+f = 0$$

und $$a_1y^2+b_1xy+c_1x^2+d_1y+e_1x+f_1 = 0$$

so geschrieben:

$$1)\ y^2+\frac{b\,x+d}{a}\,y+\frac{c\,x^2+e\,x+f}{a} = 0$$

oder $$y^2+P\,y+Q = 0$$

und

$$2)\ y^2+\frac{b_1x+d_1}{a_1}\,y+\frac{c_1x^2+e_1x+f_1}{a_1} = 0$$

oder $$y^2+P_1y+Q_1 = 0,$$

und denkt man sich unter x bereits irgend einen seiner Werthe vorgestellt, so müssen die Ausdrücke y^2+Py+Q und $y^2+P_1y+Q_1$ einen gemeinschaftlichen Faktor $y-\alpha$ haben. — Sucht man daher die Werthe von x, oder die Gleichung in x, welche statt finden muß, damit für y^2+Py+Q und $y^2+P_1y+Q_1$ ein solcher gemeinschaftlicher Faktor $y-\alpha$ existire, so wird dies abermals die gesuchte Eliminationsgleichung liefern. — Die Ausführung dieses Verfahrens folgt später (§. 521. des zweyten Theils).

Beyspiel 1. Aus 1) $xy = p$ und 2) $x^2+y^2 = q$, x und y zu finden.

Aus (1.) folgt 3) $y = \frac{p}{x}$, und das macht die (2.) übergehen in

$$4)\ x^2+\frac{p^2}{x^2} = q \quad \text{oder} \quad (x^2)^2-q(x^2)+p^2 = 0,$$

welche

$$5)\ x = \sqrt{+\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-p^2}}$$

und

$$6)\ y = \frac{p}{x} = \frac{p}{\sqrt{\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-p^2}}}$$ gibt.

In diesem Werth von y kann man auch Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}q\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-p^2}}$$

multipliziren, und man erhält dann

$$7)\ y = \sqrt{\tfrac{1}{2}q\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-p^2}};$$

aber dann muß man unter diesen 4 Werthen von y allemal erst denjenigen herausheben, welcher zu dem für x genommenen paßt. Weil aber $x^2+y^2 = q$ werden muß, so müssen die obern oder die untern (+ oder —) Zeichen in (5. und 7.) zugleich genommen werden. Und weil auch $xy = p$ werden muß, so hat man von den beyden Werthen der äußern Wurzel in (5. und 7.) jedesmal die beyden mit einerley (+ oder —) Zeichen versehenen Werthe zu nehmen, wenn p positiv, dagegen die beyden mit verschiedenen (+ oder —) Zeichen versehenen, wenn p negativ ist.

Beyspiel 2. Die Gleichungen

1) $x^2-y^2 = d$ und 2) $xy = p$, nach x und nach y aufzulösen.

Man findet aus (2.)

$$3)\ y = \frac{p}{x};$$

und dies in (1.) substituirt, gibt:

$$4)\ x^2 - \frac{p^2}{x^2} = d,$$

also $$5)\ x = \sqrt{\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+p^2}}$$

und $$6)\ y = \frac{p}{x} = \frac{p}{\sqrt{\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+p^2}}},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit

$\sqrt{-\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+p^2}}$ multiplizirt:

$$7)\ y = \sqrt{-\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+p^2}},$$

wo wieder in (5. und 7.) die obern (+ oder —) Zeichen zugleich, oder die untern zugleich genommen werden müssen, weil $x^2-y^2 = d$ werden muß; wo aber wieder von den äußern Wurzeln, die beyden mit einerley (+ oder —) Zeichen versehenen Werthe genommen werden müssen, wenn p positiv, dagegen die mit verschiedenen (+ oder —) Zeichen versehenen, wenn p negativ ist, weil $xy = p$ werden muß.

Beyspiel 3. Aus

1) $x^2+y^2 = a$ und 2) $x^2-y^2 = b$

folgt $x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b)}$ und $y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-b)}$.

Beyspiel 4. Aus

1) $x^2-y^2=d$ und 2) $(x+y+a)^2+(x-y+a)^2=b$,

folgt $x = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2d+b-a^2}$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{4}b-\tfrac{1}{2}d \mp \tfrac{1}{2}a\sqrt{2d+b-a^2}},$$

wo zu jedem Werth von x, zwey Werthe von y gehören, nämlich die beyden der äußern Wurzel, während die obern (+ oder —) Zeichen zugleich, oder die untern zugleich statt finden.

Beyspiel 5. Aus

$$1)\ \frac{18x}{y} = \frac{8y}{x} \quad \text{und} \quad 2)\ 3xy+2x+y = 485,$$

folgt $x = 10,\ y = 15;\ x = -10\frac{7}{9},\ y = -16\frac{1}{6};$

$$x = \frac{1+\sqrt{-34919}}{18},\ y = \frac{-1-\sqrt{-34919}}{12}$$

und $$x = \frac{1-\sqrt{-34919}}{18},\ y = \frac{-1+\sqrt{-34919}}{12}.$$

Beyspiel 6. Aus

$$1)\ \frac{ax}{y} = b\frac{y}{x} \quad \text{und} \quad 2)\ cxy+dx+ey = h$$

folgt
$$\begin{cases} x = \dfrac{-(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})\pm\sqrt{(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2+4ch\sqrt{ab}}}{2c\sqrt{a}} \\ y = \dfrac{-(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})\pm\sqrt{(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2+4ch\sqrt{ab}}}{2c\sqrt{b}}, \end{cases}$$

oder
$$\begin{cases} x = \dfrac{-(e\sqrt{a}-d\sqrt{b})\pm\sqrt{(e\sqrt{a}-d\sqrt{b})^2-4ch\sqrt{ab}}}{2c\sqrt{a}} \\ y = \dfrac{+(e\sqrt{a}-d\sqrt{b})\mp\sqrt{(e\sqrt{a}-d\sqrt{b})^2-4ch\sqrt{ab}}}{2c\sqrt{b}}, \end{cases}$$

wo in den zusammengehörigen Werthen von x und y immer die obern (+ oder —) Zeichen zugleich, oder die untern zugleich genommen werden müssen.

Beyspiel 7. Aus

$$1)\ x+y+x^2+y^2 = a$$
$$2)\ x-y+x^2-y^2 = b,$$

folgt

$$x = -\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2b+1}$$
$$y = -\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2a-2b+1},$$

oder
$$x = -\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2b+1}$$
$$y = -\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{2a-2b+1}.$$

Beyspiel 8. Aus

$$1)\ x+y = xy \quad \text{und} \quad 2)\ x+y+x^3+y^3 = a$$

folgt

$$x = \frac{1+\sqrt{4a+1} \pm \sqrt{4a-6-6\sqrt{4a+1}}}{4}$$

$$y = \frac{1+\sqrt{4a+1} \mp \sqrt{4a-6-6\sqrt{4a+1}}}{4},$$

wo die obern (+ oder −) zugleich oder die untern zugleich gelten, und wo einmal durchaus $+\sqrt{4a+1}$, ein andermal aber durchaus $-\sqrt{4a+1}$ statt $\sqrt{4a+1}$ gesetzt werden muß.

§. 305. Zusatz.

Sind n Gleichungen gegeben zwischen n Unbekannten, unter denen

1) entweder eine einzige von der 4ten Ordnung, die übrigen alle aber von der 1ten Ordnung sind, oder

2) zweye von der 2ten Ordnung, die übrigen alle von der 1ten Ordnung sind,

so ist man durch das vorhergegangene hinlänglich in den Stand gesetzt, diese Gleichungeu nach ihren Unbekannten aufzulösen. Man wird nach gehöriger Elimininatton aller übrigen Unbekannten, zu einer Gleichung vom 4ten Grade mit einem einzigen der Unbekannten gelangen, für diesen Unbekannten also 4 Werthe erhalten; dann aber zu jedem dieser 4 Werthe jedesmal einen einzigen Werth der übrigen Unbekannten finden.

Der Kürze wegen mag dieses nur durch einige Beyspiele erläutert werden.

Beyspiel 1. Aus

$$1)\ x^2+y^2+z^2 = a, \quad 2)\ y^2 = 2xz+b, \quad 3)\ cx = dz$$

folgt

$$x = \frac{d\sqrt{a-b}}{c+d}, \quad y = \frac{\sqrt{2acd+b(c^2+d^2)}}{c+d}$$

und

$$z = \frac{c\sqrt{a-b}}{c+d},$$

wo $\sqrt{a-b}$ durchaus bald ihren (+), bald ihren (−) Werth, aber jedesmal einen und denselben vorstellt, während zu jedem Werthe von $\sqrt{a-b}$, für y der (+) und auch der (−) Werth seiner Wurzel genommen werden kann, so daß 4 Parthien (Systeme) zusammengehöriger Werthe von x, y und z sich ergeben.

Beyspiel 2. Aus

1) $x+y+z=6$, 2) $x-y+z=2$, 3) $x^4+y^4+z^4=98$

folgt

$x = 1, 3, 2+5\sqrt{-1}, 2-5\sqrt{-1}$,
$y = 2, 2, 2, 2$,
$z = 3, 1, 2-5\sqrt{-1}, 2+5\sqrt{-1}$.

Zweyte Abtheilung.

Von den Ausdrücken von der Form $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ noch in's Besondere.

---

§. 306. Lehrsatz.

1) Wenn $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E=0$ ist, für mehr als 4 Werthe von x; so ist

$A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$, $E=0$.

2) Wenn für mehr als 4 Werthe von x,
$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E = A_1x^4+B_1x^3+C_1x^2+D_1x+E_1$
ist, so muß
$A=A_1$, $B=B_1$, $C=C_1$, $D=D_1$ und $E=E_1$
seyn.

3) Und dann sind in beyden Fällen die Gleichungen identisch für jeden Werth von x.

Beweise sind den (§§. 250. 251. 277.) gegebenen gemäß, augenfällig.

§. 307. Lehrsätze und Folgerungen.

1) Ist α einer der Werthe, welche den Ausdruck

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

zu Null machen, so läßt sich dieser Ausdruck allemal in zwey Faktoren zerlegen, von denen der eine $(x-\alpha)$ ist, der andere dagegen die Form $x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ hat.

2) Und weil letzterer Ausdruck sich jedesmal wieder in 3 Faktoren von der Form

$$x-\alpha_1, \quad x-\alpha_2, \quad \text{und} \quad x-\alpha_3$$

zerlegen läßt, so kann auch allemal

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D = (x-\alpha)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

gemacht werden.

3) Man zerlegt demnach den Ausdruck

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

in seine 4 Faktoren von vorstehender Form, wenn man die 4 Werthe α, α_1, α_2, α_3, von x sucht, welche ihn zu Null machen, und dann

$$x-\alpha, \; x-\alpha_1, \; x-\alpha_2, \; x-\alpha_3$$

als die gesuchten Faktoren nimmt.

4) Es kann $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$ nur auf eine einzige Art in die 4 Faktoren von vorstehender Form zerlegt werden. *)

5) Sind α, β, γ, δ die 4 Werthe von x, welche

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D, = 0$$

machen, so ist allemal

$$A = -(\alpha+\beta+\gamma+\delta),$$
$$B = +(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta),$$
$$C = -(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta),$$
$$D = +\alpha\beta\gamma\delta;$$

d. h. der erste Koeffizient A ist die Summe aller 4 Werthe, mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen; der andere B ist die Summe der Produkte je zweyer dieser 4 Werthe; der dritte ist wieder die Summe der Produkte zu je 3en der 4 Werthe, mit dem

---

*) Weil von den 4 Faktoren $x-\alpha$, $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, $x-\alpha_3$, je zwey derselben mit einander multiplizirt, ein Produkt von der Form

$$x^2+px+q$$

geben, so kann $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$ auf 6 Arten in ein Produkt zweyer doppelten Faktoren von der Form x^2+px+q zerlegt werden, die sich jedoch auf nur 3 wesentlich von einander verschiedene Produkte zurückführen.

entgegengesetzten Zeichen genommen, während D das Produkt aller 4 Werthe ist, mit dem eigenen Zeichen.

6) Sind daher 4 Unbekannte α, β, γ und δ durch die symetrischen Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = a,$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta = b,$$
$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta = c,$$
$$\alpha\beta\gamma\delta = d,$$

gegeben, so darf man nur die 4 Werthe von z suchen, welche der Gleichung vom 4ten Grade

$$z^4 - az^3 + bz^2 - cz + d = 0,$$

genügen, und solche statt α, β, γ und δ nehmen.

7) Hat man für eine biquadratische Gleichung

$$1)\ x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

einen der Werthe von x nämlich $x = \alpha$ gefunden, welche sie identisch machen, so dividire man durch $x-\alpha$ den Ausdruck

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r,$$

um den andern Faktor

$$x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

zu erhalten, und die Gleichung

$$2)\ x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$$

nach x aufgelöst, liefert dann die 3 übrigen, der (1.) entsprechenden Werthe von x. — Und hat man wieder einen Werth α_1 von x, welcher der Gleichung (2.) genügt, so dividire man noch mit $x-\alpha_1$ in $x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, um den andern Faktor

$$x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$$

zu erhalten; und die Gleichung

$$3)\ x^2 + \beta_1 x + \gamma_1 = 0$$

gibt dann, nach (§. 242.) aufgelöst, die beyden letzten, der (1.) und der (2.) entsprechenden Werthe von x.

Die Beweise dieser Sätze ergeben sich genau wie die der analogen Sätze der (§. §. 278—281. und 252—255.).

§. 308. Lehrsatz.

Der Ausdruck

1) $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$

läßt sich mit einer einzigen Ausnahme immer auf die Form

2) $A(x+\alpha)^4+\beta(x+\gamma)^2+\delta$ bringen.

Beweis. Denn vergleicht man beyde Ausdrücke (1. und 2.) nach (§. 306.), so erhält man die 4 Gleichungen

1) $4A\alpha = B$; 2) $6A\alpha^2+\beta = C$;

3) $4A\alpha^3+2\beta\gamma = D$; 4) $A\alpha^4+\beta\gamma^2+\delta = E$;

und daraus findet sich

$$\alpha = \frac{B}{4A}, \qquad \beta = C-\frac{3B^2}{8A} = \frac{8AC-3B^2}{8A},$$

$$\gamma = \frac{4AD-\frac{B^3}{4A}}{8AC-3B^2} \quad \text{und} \quad \delta = E-\frac{B^4}{256A^3}-\frac{(16A^2D-B^3)^2}{128A^3(8AC-3B^2)},$$

so daß also der Lehrsatz richtig ist, den einzigen Fall abgerechnet, wo der Divisor $8AC-3B^2$ Null würde, und wo $\beta = 0$ wäre, γ unbestimmt bliebe, während $16A^2D-B^3$ ebenfalls $= 0$ seyn müßte, wenn die Gleichung (3.) keinen Wiederspruch enthalten, und δ noch so bestimmt werden sollte, daß nun doch noch die Form

$$A(x+\alpha)^4+0\cdot(x+\gamma)^2+\delta$$

d. h. $$A(x+\alpha)^4+\delta$$

gerettet wäre.

Anmerkung. Ist also $8AC-3B^2 = 0$ und nicht zugleich $16A^2D-B^3 = 0$, so ist die Umwandlung des (§. 308.) nicht möglich. In allen andern Fällen aber ist sie möglich.

§. 309. Zusatz.

Sind A, B, C, D, E reel, so sind auch die bey dieser Umwandlung bestimmten α, β, γ und δ reel; also $(x+\alpha)^4$ und $(x+\gamma)^2$ für jeden reelen Werth von x allemal positiv.

1) Sind also

A, β und δ zugleich positiv,

so ist $$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

für jeden reelen Werth von x allemal positiv, nie negativ und nie Null.

2) Sind

$$A,\ \beta \text{ und } \delta$$

zugleich negativ, so ist der Ausdruck

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

für jeden reelen Werth von x, allemal negativ, nie Null und nie positiv.

Denn es erhellet die Richtigkeit der Behauptungen aus der bloßen Ansicht der Umformung

$$A(x+\alpha)^4+\beta(x+\gamma)^2+\delta$$

Anmerkung. Dagegen würde man sich sehr irren, wenn man umgekehrt behaupten wollte, daß A, β, δ, jedesmal alle zugleich positiv oder alle zugleich negativ seyn müssen, wenn der Ausdruck

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+F$$

d. h. $$A(x+\alpha)^4+\beta(x+\gamma)^2+\delta$$

für jeden reelen Werth von x, durchaus positiv, oder durchaus negativ werden soll; obgleich wohl behauptet werden könnte, daß A im erstern Falle nothwendig positiv und im andern Falle nothwendig negativ seyn müsse.

§. 310. Aufgabe.

Unter der Voraussetzung daß n, p, q, r beliebig reel sind, soll man den Gang der reelen Werthe des hier durch f_x bezeichneten Ausdrucks

$$x^4+nx^3+px^2+qx+r$$

nachweisen, für den Fall, daß statt x nach und nach alle stetig neben einander liegenden, von $+\infty$ bis zu $-\infty$ hin abnehmenden reelen Werthe von x, gesetzt gedacht werden.

Auflösung I. Genau unter den Voraussetzungen der (§. §. 263. 264. und 285.), nämlich wenn h positiv, aber im Moment des Verschwindens gedacht ist, sind

$$\alpha+h, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \alpha-h$$

drey abnehmende und stetig auf einander folgende Werthe von x, und

$$f_{\alpha+h}, \quad f_\alpha, \quad \text{so wie} \quad f_{\alpha-h}$$

stellen die 3 zugehörigen Werthe von f_x d. h. von

$$x^4+nx^3+px^2+qx+r$$

vor. Und nach (§. 149. Lehrs. 1.) hat man:

$$f_{\alpha\pm h} = (\alpha\pm h)^4+n(\alpha\pm h)^3+p(\alpha\pm h)^2+q(\alpha\pm h)+r$$
$$= (\alpha^4+n\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r)$$
$$\pm(4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q)h$$
$$+(6\alpha^2+3n\alpha+p)h^2$$
$$\pm(4\alpha+n)h^3+h^4;$$

also

1) $f_{\alpha+h}-f_\alpha = (4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q)h+(6\alpha^2+3n\alpha+p)h^2$
$$+(4\alpha+n)h^3+h^4$$
$$= [(4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q)+((6\alpha^2+3n\alpha+p)$$
$$+[(4\alpha+n)+h]h)h]h$$

2) $f_\alpha-f_{\alpha-h} = (4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q)h-(6\alpha^2+3n\alpha+p)h^2$
$$+(4\alpha+n)h^3-h^4$$
$$= [(4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q)-((6\alpha^2+3n\alpha+p)$$
$$-[(4\alpha+n)-h]h)h]h$$

II. Nun ist $f_x = +\infty$, sowohl, wenn $x = +\infty$, als auch wenn $x = -\infty$ gesetzt wird. (Vgl. §. 285. II. und den dortigen Beweis, der hier leicht wiederholt werden kann).

III. Ferner ändern sich die Werthe von f_x mit denen von x, stetig; weil der Unterschied $f_{\alpha+h}-f_\alpha$ oder $f_\alpha-f_{\alpha-h}$, mit h multiplizirt erscheint, also mit h selbst im Moment des Verschwindens ist, d. h. kleiner ist, als jede noch so klein gedachte Zahl. (Vgl. §. 285. III. und §. 264.).

IV. So lange der Koeffizient von h, nämlich

$$4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q$$

positiv ist, so lange nimmt f_x mit x zugleich fortwährend ab; so lange aber dieser Koeffizient $4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q$ negativ ist, so lange wächst f_x, während x abnimmt. (Vgl. §. 285. IV.).

V_1. Ist aber

1) $4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q = 0$

und zugleich auch der Koeffizient von h^2 nämlich

$$2)\ 6\alpha^2+3n\alpha+p = 0,$$

(welches jedoch nur in Ausnahmsfällen so werden kann, weil, wenn man α aus (1. und 2.) eliminirt, sich eine Gleichung zwischen den gegebenen Koeffizienten n, p, q, r selbst ergibt, und welches namentlich nach (§. 289.) voraussetzt, daß zwey der 3 aus (1.) sich ergebenden Werthe von α reel und einander gleich sind), so nimmt f_x noch immer mit x zugleich ab, wenn der Koeffizient von h^3, d. h. $4\alpha+n$ positiv, dagegen wächst f_x noch ununterbrochen, wenn dieser Koeffizient $4\alpha+n$ negativ seyn sollte (während x jedesmal stetig abnehmend gedacht wird).

V_2. Ist dagegen

$$1)\ 4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q = 0$$

und $$2)\ 6\alpha^2+3n\alpha+p = 0$$

und noch $$3)\ 4\alpha+n = 0,$$

(welches noch seltener der Fall seyn kann, weil diese 3 Gleichungen wenn man α eliminirt, zu zwey Bedingungs-Gleichungen zwischen den Koeffizienten n, p, q, r, selbst führen und welches namentlich nach (§. 289. Anmerkung.) voraussetzt, daß alle 3 Werthe von α aus (I.) einander gleich und $= -\frac{1}{4}n$ sind), so ist

$$f_{\alpha+h}-f_\alpha = h^4,$$

also positiv, und $$f_\alpha-f_{\alpha-h} = -h^4,$$

also negativ; demnach f_α kleiner als jeder der beyden nächsten Nachbarwerthe $f_{\alpha+h}$ und $f_{\alpha-h}$, d. h. ein Kleinstes (ein Minimum); und dieser Werth von α für x, macht einen Scheidepunkt in der Reihe der reelen Werthe von f_x, die von f_α an, nachdem sie abgenommen haben, jetzt wieder zunehmen.

VI. Ist der Koeffizient von h, der Null gleich, d. h. ist

$$4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q = 0,$$

und dabey nicht noch $6\alpha^2+3n\alpha+p$ der Null gleich (und es läßt sich allemal ein solcher reeler Werth von α finden, oder gar dreie derselben, wie auch n, p, q, r reel gegeben seyn mögen nach §. 286.), so ist wiederum f_α kleiner als seine beyden nächsten Nachbar-Werthe $f_{\alpha+h}$ und $f_{\alpha-h}$, oder größer als beyde, also ein Kleinstes (ein Minimum) oder ein Größtes (ein Maximum), je nach-

dem für dieselben Werthe von α, der Koeffizient von h^2 in (I. 1. 2.), nämlich

$$6\alpha^2+3n\alpha+p$$

positiv oder negativ ist. In jedem Falle ist also dasmal der Werth f_α ein Scheidepunkt in der Reihe der reelen Werthe von f_x, und zwar ein Scheidepunkt im Abnehmen, wenn $6\alpha^2+3n\alpha+p$ positiv ist, dagegen ein Scheidepunkt im Zunehmen (so daß von da ab die Werrhe von f_x wieder abnehmen), wenn $6\alpha^2+3n\alpha+p$ negativ ist, für den Werth, oder für die Werthe von α, welche, wie hier vorausgesetzt worden ist,

$$4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q = 0$$

machen. (Vgl. §. 285. VI.).

VII. Solcher Scheidepunkte hat also der Ausdruck

$$f_x \quad \text{oder} \quad x^4+nx^3+px^2+qx+r$$

für gewisse Werthe seiner Koeffizienten n, p, q, r dreye (die durch α_1, α_2 und α_3 bezeichnet seyn können, so daß α_1 der größeste, α_3 der kleinste derselben ist) nach (§. 287.), wenn

1) $(\frac{3}{4}n)^2-3(\frac{1}{2}p)$ d. h. $\frac{9}{16}n^2-\frac{3}{2}p$

positiv und zugleich

2) $4[(\frac{3}{4}n)^2-3(\frac{1}{2}p)]^3 > [2(\frac{3}{4}n)^3-9(\frac{3}{4}n)(\frac{1}{2}p)+27(\frac{1}{4}q)]^2$

ist; dagegen hat f_x nur einen einzigen solchen Scheidepunkt, wenn eine dieser beyden Bedingungen nicht statt findet. (Vgl. §. 285. VII.).

VIII. Es gehen also die Werthe von f_x, während x von $+\infty$ bis zu $-\infty$ hin stetig abnimmt, von $+\infty$ anfangend, abnehmend fort und kehren zuletzt zu $+\infty$ zurück (nach II.). Dazwischen liegt nun entweder nur ein einziger Scheidepunkt oder es liegen deren dreie dazwischen, für $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$ und $x = \alpha_3$ (nach VII.).

§. 311. Zusatz.

1) Liegt nur ein Scheidepunkt dazwischen etwa für $x = \beta$, so gehen die Werthe von f_x von $+\infty$ bis zu f_β stetig abnehmend fort, und von da ab bis zu $+\infty$ zurück, ohne Unterbrechung

stetig wachsend. Wenn nun dabey f_β positiv ist, so ist f_x durchaus allemal positiv, nie negativ und nie Null; und die Gleichung $f_x = 0$ nach x aufgelöst, liefert dann keinen einzigen reelen Werth für x. Ist aber f_β negativ, so geht f_x offenbar zweymal durch Null hindurch, und die Gleichung $f_x = 0$ liefert dann, aufgelöst, für x zwey reele Werthe. Und ist f_β selbst $= 0$, so fallen diese beyden reelen Werthe von x, welche f_x zu Null machen, mit β zusammen, so daß sie einander gleich und $= \beta$ sind.

2) Liegen aber 3 Scheidepunkte $f_{(\alpha_1)}$, $f_{(\alpha_2)}$, $f_{(\alpha_3)}$ dazwischen, so nimmt f_x von $+\infty$ bis zu $f_{(\alpha_1)}$ stetig ab, wächst dann von $f_{(\alpha_1)}$ bis zu $f_{(\alpha_2)}$ stetig, nimmt von da an bis zu $f_{(\alpha_3)}$ hin wieder stetig ab, um zuletzt von da ab bis zu $+\infty$ zurückkehrend, fortwährend stetig zu wachsen; während nämlich dem x nach und nach alle reelen Werthe von $+\infty$ an bis zu $-\infty$ hin stetig abnehmend, gegeben gedacht werden.

Ist nun $f_{(\alpha_1)}$ negativ, $f_{(\alpha_2)}$ positiv, und $f_{(\alpha_3)}$ wieder negativ, so geht f_x viermal durch 0 hindurch und die Gleichung $f_x = 0$, nach x aufgelöst, gibt also dann vier reele Werthe von x. Sind dagegen $f_{(\alpha_1)}$, $f_{(\alpha_2)}$, $f_{(\alpha_3)}$ alle 3e positiv, so ist f_x allemal positiv, nnd es existirt dann wieder kein einziger reeler Werth von x, welcher $f_x = 0$ identisch machte. In jedem andern Falle der Werthe $f_{(\alpha_1)}$, $f_{(\alpha_2)}$ und $f_{(\alpha_3)}$, die Ausnahmsfälle abgerechnet, wo $f_{(\alpha_1)}$ oder $f_{(\alpha_2)}$ oder $f_{(\alpha_3)}$ selber Null sind, geht dagegen f_x wiederum zweymal, und nur zweymal, durch Null hindurch.

Die Gleichung vom 4ten Grade

$$f_x = 0 \quad \text{d. h. } x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

deren Koeffizienten alle reel sind, hat also entweder gar keine reele Auflösung (mithin 4 imaginäre), oder zwey reele (also auch zwey imaginäre), oder endlich 4 reele Auflösungen.

§. 312. Zusatz.

Damit also eine biquadratische Gleichung

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0$$

vier reele Auflösungen habe, ist erforderlich

1) daß die Gleichung

$$4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q = 0,$$

für α 3 reele Werthe α_1, α_2 und α_3 liefere, welches zwey Bedingungen zwischen den Koeffizienten n, p, q, und r der gegebenen Gleichung erfordert (s. §. 310. VII.);

2) daß, wenn α_1 der größeste und α_3 der kleinste dieser Werthe ist, zugleicher Zeit $f_{(\alpha_1)}$ negativ, $f_{(\alpha_2)}$ wieder positiv und $f_{(\alpha_3)}$ nochmals negativ werde, was abermals 3 Bedingungen sind, zwischen n, p, q, r. — Und wenn eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, so hat die biquadratische Gleichung

$$x^4+nx^3+px^2+qx+r = 0$$

nur zwey reele Auflösungen oder gar keine. Das letztere aber findet nur dann statt, wenn für den einzigen reelen Werth von α, oder für die drey reelen Werthe von α, welche

$$4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q, = 0$$

machen, die zugehörgen Werthe f_α von f_x, durchaus positiv sind.

§. 313. Zusatz.

Ist aber der einzige Scheidepunkt f_β, oder einer der 3 Scheidepunkte $f_{(\alpha_1)}$, $f_{(\alpha_2)}$ oder $f_{(\alpha_3)}$ (§. 311.) der Null gleich, so sind zwey der Auflösungen der Gleichung

$$f_x = 0 \quad \text{d. h. } x^4+nx^3+px^2+qx+r = 0$$

reel und einander gleich.

Fallen zwey der Scheidepunkte $f_{(\alpha_1)}$, $f_{(\alpha_2)}$ und $f_{(\alpha_3)}$ mit Null zusammen, so muß man unterscheiden

1) ob $f_{(\alpha_1)} = f_{(\alpha_3)} = 0$ ist; denn dann hat die Gleichung $f_x = 0$, zwey gleiche Auflösungen $x = \alpha_1$, und noch zwey gleiche $x = \alpha_3$, nnd alle vier Auflösungen sind reel;

2) ob $f_{(\alpha_1)} = f_{(\alpha_2)} = 0$ oder $f_{(\alpha_2)} = f_{(\alpha_3)} = 0$; denn in jedem dieser Fälle hat die Gleichung $f_x = 0$ drey reele Auflösungen $x = \alpha_1 = \alpha_2$ oder $x = \alpha_2 = \alpha_3$, während die 4te Auflösung dann nothwendig ebenfalls reel ist. Diese Nummer setzt aber voraus, daß auch die Gleichung

$$4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q = 0$$

zwey gleiche reele Auflösungen habe, welches unter den Voraussetzungen des (§. 310. V_1.) der Fall ist.

Fallen endlich alle 3 Scheidepunkte $f_{(\alpha_1)}$, $f_{(\alpha_2)}$ und $f_{(\alpha_3)}$ mit der Null zusammen, so sind alle 4 Auflösungen der Gleichung $f_x = 0$ einander gleich und alle 4 reel und $= \alpha_1$. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn die 3 Werthe von α aus

$$4\alpha^3 + 3n\alpha^2 + 2p\alpha + q = 0$$

alle 3e einander gleich sind, also nur unter den Voraussetzungen des (§. 310. V_2.).

Man erkennet die Richtigkeit von allen diesen Behauptungen sogleich, wenn man den Gang der reelen Werthe von f_x des (§. 310.) aufmerksam verfolgt. Man kann aber auch umgekehrt zu Werke gehen, die Existenz der 4 Auflösungen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von $f_x = 0$ voraussetzen, und nach den Bedingungen suchen, welche erfüllt seyn müssen, wenn darunter zwey reele und gleiche Werthe, und dabey die andern Werthe reel und ungleich, oder reel und gleich, oder imaginär sind; oder die Bedingungen aufsuchen, unter denen 3 dieser Werthe reel und einander gleich sind, oder endlich unter welchen alle 4 Werthe einander gleich sind. Mit andern Worten: man kann die Bedingungen aufsuchen, unter welchen der Ausdruck

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r,$$

welcher allemal die Form

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

annehmen kann, die spezielleren Formen

1) $(x-\alpha)^2(x-\gamma)(x-\delta)$

oder 2) $(x-\alpha)^2[x-(P+Q\sqrt{-1})][x-(P-Q\sqrt{-1})]$

oder 3) $(x-\alpha)^2(x-\gamma)^2$

oder 4) $(x-\alpha)^3(x-\delta)$

oder 5) $(x-\alpha)^4$

annehmen wird.

Man darf zu dem Ende nur jede dieser Multiplikationen wirklich ausführen, das Produkt mit dem gegebenen Ausdruck

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$$

dem (§. 306.) gemäß vergleichen, und man wird allemal 4 Gleichungen erhalten, aus denen dann im ersten Falle α, γ, δ oder im 2ten α, P, Q oder im 3ten α, γ oder im 4ten α, δ oder endlich im 5ten Falle α allein, eliminirt werden kann; und in jedem Falle erhält man eine oder

2 oder 3 Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten n, p, q, und r, welche, so oft sie erfüllt sind, einen dieser Ausnahmsfälle zu erkennen geben.

§. 314. Zusatz.

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, daß wenn in der Gleichung vom 4ten Grade

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

mit reelen Koeffizienten, der letzte r negativ seyn sollte, so daß der Werth von f_x für $x = 0$, negativ und $= r$ werden sollte, dann die Gleichung selbst wenigstens einen positiven, und wenigstens einen negativen Werth für x liefern werde; weil dann zwischen $+\infty$ und 0, und dann noch einmal zwischen 0 und $-\infty$ ein Werth von x liegen muß, welcher $f_x = 0$ identisch macht (§. 310.).

Schluß-Anmerkung.

Ueberhaupt bemerke man, daß wenn f_x für $x = \alpha$ positiv, dagegen für $x = \beta$ negativ wird, dann zwischen α und β ein Werth von x liegen muß, welcher $f_x = 0$ macht (Vgl. Schluß-Anmerkung zum 11ten Kapitel.).

Zahlenlehre.

Dreizehntes Kapitel.

Von dem Auflösen der Gleichungen durch Substitution, aus anderen zugleich mit ihren Auflösungen gegebenen Gleichungen.

§. 315. Lehrsatz.

Hat man zwey Gleichungen z. B.

$$\text{I. } ax+b-\frac{cx}{d}=m$$

und

$$\text{II. } ax+q-\frac{4x}{3}=8,$$

so daß die zweyte aus der ersten entsteht, wenn in der ersten statt gewisser Buchstaben, gewisse andere allgemeine oder Ziffern-Ausdrücke gesetzt werden; wie hier z. B., wenn man setzt

statt	b,	c,	d,	m,
beziehlich	q,	4,	3,	8,

so gibt jede algebraisch abgeleitete der Gleichung (I.), nothwendig eine abgeleitete der Gleichung (II.), wenn man in letzt gegebener dieselben Substitutionen vornimmt. —

Ist also z. B.

$$1)\ x = \frac{dm - bd}{ad - c}$$

eine abgeleitete Gleichung der Gleichung (I.), so ist auch

$$x = \frac{3 \cdot 8 - q \cdot 3}{a \cdot 3 - c} \quad \text{oder}$$

$$2)\ x = \frac{24 - 3 \cdot q}{3a - c}$$

nothwendig eine aus der Gleichung (II.) algebraisch abgeleitete.

Beweis fällt unmittelbar in die Augen, weil man sich nur vorstellen darf, daß während der Ableitung der (1) aus der (I.), die bemerkten Buchstaben schon die Werthe, die für sie gesetzt werden, repräsentiren. Denn unter dieser Voraussetzung ist die Gleichung (I.) schon die (II.), daher auch die abgeleitete (1) schon eine aus der zweyten (II.) abgeleitete, folglich um so mehr, wenn dann statt der Buchstaben die Werthe wirklich gesetzt werden, die sie, der Annahme nach, repräsentiren; d. h. wenn man die (2) aus ihr macht.

Beispiel 1. Hat man die Gleichungen

$$I.\ ax + b - \frac{cx}{d} = m$$

und

$$II.\ ax + b + \frac{cx}{d} = m$$

so erhellet, daß die zweyte aus der ersten entsteht, wenn man in der ersten entweder $-c$ statt c, oder $-d$ statt d schreibt.

Setzt man daher in der aus (I.) abgeleiteten Gleichung

$$1)\ x = \frac{dm - bd}{ad - c},$$

entweder ebenfalls $-c$ statt c, oder $-d$ statt d, so sind die dann entstehenden

$$\alpha)\ x = \frac{dm - bd}{ad - (-c)} \quad \text{oder}$$

$$\beta)\ x = \frac{(-d)m - b(-d)}{a \cdot (-d) - c},$$

nothwendig aus der Gleichung (II.) abgeleitete. Die beyden Gleichungen (α) und (β) fallen aber in die einzige

$$2)\ x = \frac{dm - bd}{ad + c}$$

zusammen, welche daher eine aus (II.) algebraisch abgeleitete ist.

Beyſpiel 2. Iſt gegeben die Gleichung

$$\text{I. } ax^2+bx=c$$

und eine aus ihr abgeleitete

$$\text{1) } x=\frac{-b\pm\sqrt{(4ac+b^2)}}{2a};$$

hat man ferner auch die Gleichung

$$\text{II. } 6x-4x^2=-5;$$

ſo ſieht man leicht, daß dieſe (II.) aus der (I.) erhalten wird, wenn man

ſtatt	a,	b, c
beziehlich	−4,	6, −5

ſchreibt. Macht man daher dieſelben Subſtitutionen in (1), ſo erhält man

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{[4\cdot(-4)\cdot(-5)+6^2]}}{2\cdot(-4)},$$

oder:

$$\text{2) } x=\frac{6\mp\sqrt{116}}{8};$$

und dieſes iſt nothwendig eine aus der (II.) algebraiſch abgeleitete Gleichung.

Man erhält aber auch die (II.) aus der (I.) wenn man ſetzt

ſtatt	x, a,	b, c
beziehlich	−x, −4,	−6, −5.

Macht man daher in (1) dieſelben Subſtitutionen, ſo erhält man:

$$-x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{[4\cdot(-4)(-5)+(-6)^2]}}{2\cdot(-4)},$$

oder:

$$\text{2) } x=\frac{6\pm\sqrt{116}}{8};$$

welches widerum eine aus (II.) abgeleitete ſeyn muß.

Anmerkung. Wenn man die Gleichung (II.) aus der Gleichung (I.) durch verſchiedene Subſtitutionen ableiten kann, ſo werden zwar nach dem Lehrſatz, wenn man dieſelben Subſtitutionen nach einander in (1) vornimmt, alle entſtehenden Gleichungen nothwendig aus (II.) abgeleitete ſeyn; daß ſie aber alle gerade dieſelben ſind, behauptet der Lehrſatz nicht, kann daher auch nicht unbedingt angenommen werden.

§. 316. Zuſatz.

Iſt die aus (I.) abgeleitete Gleichung die Auflöſung derſelben (I.) nach einem Buchſtaben z. B. nach x, und kann die zweyte

(II.) aus der (I.) abgeleitet werden, indem man außer andern Substitutionen, statt des Unbekannten x in der (I.), gerade den Unbekannten in (II.) setzt, so ist die aus (1) entstehende Gleichung, wenn man dieselben Substitutionen in ihr vornimmt, ohnfehlbar sogleich die Auflösung von der Gleichung (II.).

Auch würde man noch durch diese Substitution die Auflösung der Gleichung (II.) aus der Auflösung der (I.) ohne Mühe ableiten, und meist mit großem Vortheil, wenn auch statt x nicht gerade der Unbekannte (Buchstabe) von (II.) selber, sondern ein aus ihm einfach zusammengesetzter Ausdruck substituirt werden müßte.

Beyspiel. Man habe

I. $4x^2-6x = 5$ und ihre Auflösung

1) $x = \frac{6\pm\sqrt{116}}{8}$, so wie auch

II. $4x^2+6x = 5$;

so sieht man leicht, daß die (II.) aus der (I.) entsteht, wenn $-x$ statt x gesetzt wird. Nimmt man daher dieselbe Substitution in (1) vor, so erhält man:

$$-x = \frac{6\pm\sqrt{116}}{8}$$

oder 2) $x = \frac{-6\mp\sqrt{116}}{8}$,

welches die Auflösung der Gleichung (II.) seyn muß (weil sie nothwendig eine aus (II.) abgeleitete Gleichung ist).

Anmerkung. Diese Auflösung durch Substitution ist besonders vortheilhaft bey solchen quadratischen Gleichungen. Man nimmt eine allgemeine dieser Gattung, z. B.

$$x^2+px+q = 0,$$

löst sie auf, und erhält

$$x = \frac{-p\pm\sqrt{(p^2-4q)}}{2},$$

und indem man nun jeder andern gegebenen quadratischen Gleichung dieselbe Form giebt, erhält man augenblicklich die Auflösung derselben durch Substitution aus der hier ein für allemal entwickelten. — Eben so enthält die Auflösung des (§. 242.) die aller quadratischen Gleichungen, indem man nur jede gegebene auf die Form $ax^2+bx+c = 0$ bringt, und dann in jener Auflösung statt a, b, c, die gehörigen Werthe setzt.

§. 317. Zusatz.

Man kann sich auch zuweilen desselben Mittels bedienen, um aus einer gegebenen Auflösung einer gegebenen Gleichung nach einem Buchstaben, die Auflösung derselben Gleichung nach einem andern ihrer Buchstaben abzuleiten.

Es sey z. B. gegeben

$$\text{I. } x^2+px+p^2 = q$$

und die Auflösung

$$1)\ x = \frac{-p\pm\sqrt{(4q-3p^2)}}{2}.$$

Soll nun dieselbe Gleichung nach p aufgelößt werden, so hat man

$$\text{II. } x^2+px+p^2 = q$$

welche aus der (I.) entsteht, wenn

$$\text{statt } \frac{x,\ p}{}$$
$$\text{beziehlich } \frac{p,\ x}{}$$

gesetzt wird. Dieselbe Substitution in (1) vorgenommen gibt aber sogleich:

$$2)\quad p = \frac{-x\pm\sqrt{4q-3x^2}}{2}.$$

§. 318. Lehrsatz.

Hat man zwey oder mehr unabhängige Gleichungen z. B.

$$\text{I. } \left\{\begin{array}{r} ax+by = c \\ mx+py = q \end{array}\right\}$$

und eben so viele andere derselben Art

$$\text{II. } \left\{\begin{array}{r} az-by = c \\ -3mz+ny = 2h \end{array}\right\};$$

und gehen die erstern in die andern über, dadurch daß man statt gewisser Buchstaben, gewisse andere Ausdrücke setzt, so geht auch jede aus den erstern abgeleitete Gleichung in eine aus den zweyten Gleichungen abgeleitete über, wenn man in ihr dieselben Substitutionen vornimmt.

Setzt man nämlich in (I.)

$$\text{statt } \frac{x,\ b,\ m,\ p,\ q}{}$$
$$\text{beziehlich } \frac{z,\ -b,\ -3m,\ n,\ 2h}{},$$

so erhält man wirklich die Gleichungen (II).

Ist nun

$$1)\ x = \frac{cp - bq}{ap - bm}$$

eine aus den Gleichungen (I.) abgeleitete, so erhält man aus ihr durch dieselben Substitutionen

$$2)\ z = \frac{cn + 2bh}{an - 3bm},$$

welches eine aus den Gleichungen (II.) abgeleitete seyn muß.

Beweis wie der von (§. 310.).

§. 319. Zusatz.

Auch dieses Satzes bedient man sich, um aus den gegebenen Auflösungen gegebener Gleichungen, die Auflösungen anderer Gleichungen, durch bloße Substitution abzuleiten.

Man löst z. B. die beyden Gleichungen

$$I.\ \left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ mx + py = q \end{array}\right\}$$

ein für allemal nach x und y auf, und erhält

$$1)\ x = \frac{cp - bq}{ap - bm} \quad \text{und} \quad y = \frac{aq - cm}{ap - bm}.$$

Sind nun gegeben die beyden Gleichungen

$$II.\ \left\{\begin{array}{l} (ah - cf)x + (bh - cg)y = dh - ck \\ (ap - cm)x + (bq - cn)y = dp - cq \end{array}\right\},$$

so entstehen diese aus (I.) indem man setzt

statt	a,	b,	c,	m,	p,	q
beziehlich	ah—cf,	bh—cg,	dh—ck,	ap—cm,	bq—cn,	dp—cq;

und man erhält dnrch dieselben Snbstitutionen aus (I.):

$$2)\ \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{(dh - ck)(bq - cn) - (bh - cg)(dp - cq)}{(ah - cf)(bq - cn) - (bh - cg)(ap - cm)} \\ y = \dfrac{(ah - cf)(dp - cq) - (dh - ck)(ap - cm)}{(ah - cf)(bq - cn) - (bh - cg)(ap - cm)} \end{array}\right\}$$

welches die Auflösungen von (II.) sind.

§. 320. Zusatz.

Man kann sich aber auch oft desselben Mittels bedienen, um aus einer einzigen Auflösung nach einem Unbekannten, die Auflösungen nach den übrigen Unbekannten derselben gegebenen, von einander unabhängigen Gleichungen, abzuleiten.

Es sey z. B. aus den Gleichungen

$$\text{I.} \quad \left\{ \begin{array}{l} ax+by+cz = d \\ fx+gy+hz = k \\ mx+ny+pz = q \end{array} \right\}$$

gefunden die Auflösung

$$1) \quad x = \frac{cnk+bhq+dgp-bkp-dhn-cgq}{cfn+bhm+agp-bfp-ahn-cgm};$$

und will man hieraus die Auflösungen nach y finden, so sind hier dieselben Gleichungen gegeben:

$$\text{II.} \quad \left\{ \begin{array}{l} ax+by+cz = d \\ fx+gy+hz = k \\ mx+ny+pz = q \end{array} \right\}$$

und man muß suchen, welche Substitutionen in (I.) vorgenommen werden müssen, um, während y statt x gesetzt wird, dieselben Gleichungen wieder zu erhalten. Es ist aber sehr leicht zu sehen, daß dies geschieht, wenn

$$\begin{array}{rl} \text{statt} & \underline{x,\ y,\ a,\ b,\ f,\ g,\ m,\ n,} \\ \text{beziehlich} & y,\ x,\ b,\ a,\ g,\ f,\ n,\ m \end{array}$$

gesetzt wird. Durch dieselben Substitutionen erhält man dann aus (1):

$$2) \quad y = \frac{cmk+ahq+dfp-akp-dhm-cfq}{cgm+ahn+bfp-agp-bhm-cfn},$$

und dies ist ebenfalls eine aus denselben 3 Gleichungen abgeleitete, folglich die Auflösung derselben 3 Gleichungen nach y.

Setzt man in (I.)

$$\begin{array}{rl} \text{statt} & \underline{x,\ z,\ a,\ c,\ f,\ h,\ m,\ p,} \\ \text{beziehlich} & z,\ x,\ c,\ a,\ h,\ f,\ p,\ m, \end{array}$$

so kehren dieselben Gleichungen wieder; macht man daher in (1) dieselben Substitutionen, so erhält man

$$3) \quad z = \frac{ank+bfq+dgm-bkm-dfn-agq}{ahn+bfp+cgm-bhm-cfn-agp},$$

welches eine Auflösung nach z von denselben 3 Gleichungen ist.

Die Auflösung (1) kann man aber nach (§. 319.) aus den dortigen Gleichungen, welche die 3 gegebenen Gleichungen (I.) durch Elimination von z liefern, ebenfalls schon durch Substitution finden.

Anhang zum dreyzehnten Kapitel.

Vierte Anwendung der hier entwickelten Lehren der Zahlen, auf die allgemeine Größenlehre (Lehre der benannten Zahlen).

27. Aufgabe.

Aus gegebenen Größen d. h. benannten Zahlen, andere, von diesen abhängige Größen (benannte Zahlen) zu finden.

Auflösung 1. Man drücke alle Größen, die gegebenen so wohl, als die gesuchten, als benannte Zahlen aus, die sich, wo möglich, paarweise auf einerlei beliebig anzunehmende Einheit beziehen; die gegebenen Größen werden dann durch gegebene unbenannte Zahlen, die gesuchten dagegen durch unbekannte unbenannte Zahlen x, y, z, ꝛc. vorgestellt.

2) Die Art der Abhängigkeit der Größen von einander muß es möglich machen, daß eine oder mehrere Größen auf doppelte Art als benannte Zahl ausgedrückt werden können. Zwey Ausdrücke aber, welche unbenannte Zahlen sind, und auf einerlei Einheit bezogen, dieselbe Größe doppelt ausdrücken, müssen dieselbe ganze oder gebrochene Zahl vorstellen, also einander gleich seyn.

3) Verschafft man sich anf diese Weise so viele Gleichungen, als unbekannte unbenannte Zahlen x, y, z, ꝛc. vorkommen, so darf man nur diese Gleichungen nach diesen Unbekannten x, y, z, ꝛc. auflösen, um nachher unter allen gefundenen Werthen der letztern, welche diesen Gleichungen genügen, diejenigen absondern zu können, welche zu-

gleich auch allen übrigen Bedingungen der Aufgabe genügen, auch denen, die nicht in den gebildeten Gleichungen ausgesprochen sind. Diese Werthe der Unbekannten x, y, z, ꝛc. allein, sind dann als die wahren Auflösungen der Aufgabe anzusehen, wenn man sie auf die vorher schon für sie festgesetzte Einheit bezieht, d. h. als benannte Zahl (Größe) nimmt.

Anmerkung 1. Es sind oft eigene Kenntnisse nöthig, welche zum Theil in der Raumgrößenlehre, zum Theil in der Kraftgrößenlehre, überhaupt aber in allen Zweigen der besondern Größenlehre gelehrt werden müssen, um eine Größe einmal, oder noch einmal, als benannte Zahl, aus andern benannten Zahlen zusammengesetzt zu erhalten; d. h. um die Gleichungen anzusetzen. Für viele einfache im Leben vorkommende Fälle, reichen die Sätze (Anh. zum 2ten Kap. Nr. 18—21. und zum 3ten Kapitel Nr. 26.) aus, um die Gleichungen augenblicklich zu haben. Solche einfachere, in der vorliegenden allgemeinen Aufgabe enthaltenen Fälle, heißen dann Aufgaben der gemeinen Rechenkunst, während die mehr verwickelten hieher gehörigen Fälle die algebraischen Aufgaben bilden. Diese letztern heißen dann wohl auch wieder geometrisch-algebraische Aufgaben, wenn sie sich vorzüglich mit Raumgrößen beschäftigen.

Anmerkung 2. Dem Anfänger sind nachstehende Punkte nicht genugsam zu empfehlen:

1) Nie rechnet man mit Größen, sondern immer nur mit unbenannten Zahlen.

2) Der Unbekannte x, in der Gleichung, welcher gesucht wird, kann nie eine Größe seyn, sondern ist immer eine unbenannte Zahl, eine ganze oder gebrochene, welche sich bereits auf eine bestimmte angenommene Einheit bezieht. Man sucht z. B. in der Rechnung nie eine Linie, oder eine Summe Geldes, oder dergl.; sondern eine Zahl x von Fußen, oder eine Zahl z von Zollen, oder eine Zahl y von Thalern, oder eine Zahl v von Groschen, u. s. w. Ob man aber die unbenannte Zahl x von Fußen, oder die unbenannte Zahl z von Zollen, derselben Linie suchen wolle, darüber hat man sich vorher bereits entscheiden müssen, und man konnte die Gleichung zwischen diesen unbenannten Zahlen, aus welcher nachgehends x oder z gefunden werden mußte, nicht eher erhalten, als bis man sich darüber entschieden gehabt hatte.

3) Aber eben weil man sich vorher bereits entschieden haben muß,

ob man die Zahl x von Fußen oder die Zahl z von Zollen (um bey diesem Beyspiele zu bleiben) gefunden wissen wolle, welche beyde dieselbe gesuchte Linie ausdrücken, und weil man sich solches notirt haben muß, so kann man nachher nie mehr darüber im Zweifel seyn.

4) Die Einheit, ob Fuß oder Zoll, ob Thaler oder Groschen, ob Centner oder Pfund, auf welche man die gegebenen und die gesuchten Größen beziehen will, kann nie mit zu den gesuchten Stücken gehören, sondern wird immer ganz willkührlich angenommen, oder gegeben, und jedesmal wird nur die unbenannte Zahl x, oder z, oder ꝛc. ꝛc. dazu gesucht, welche auf diese bestimmte aber beliebig gewählte Einheit bezogen, die gesuchte Größe selbst geben muß.

28. Zusatz.

Da zwar jedes Maaß (unbenannte Zahl), welches der Aufgabe zwischen den Größen Genüge leistet, auch den Gleichungen Genüge leisten muß; aber nicht umgekehrt, jeder Werth der Unbekannten, welcher den Gleichungen Genüge leistet, auch die Aufgabe löset; in so fern er nicht bloß den Bedingungsgleichungen der Abhängigkeit genügen muß, sondern auch den andern nicht in Gleichung gestellten Eigenschaften des gesuchten Maaßes, so ergeben sich sogleich noch folgende Sätze:

1) Die Werthe der Unbekannten, welche den Gleichungen entsprechen, aber nicht zugleich absolute ganze oder gebrochene Zahlen sind, können die gegebene Aufgabe nie lösen, weil jedes gesuchte Maaß einer Größe nothwendig eine ganze oder gebrochene absolute Zahl seyn muß. Solche Werthe die nicht absolute Zahlen sind, können daher ohne weiters verworfen werden. (Also die negativen Werthe, so gut wie die imaginären; und diese wieder so gut wie die Nullenwerthe).

2) Aber auch diejenigen Werthe, welche absolute Zahlen sind, und sich für die Unbekannten durch Auflösung der Bedingungsgleichungen ergeben, müssen nicht nothwendig die Aufgabe lösen, sondern diese Nothwendigkeit tritt nur dann erst ein, wenn dieselben Zahien auch noch den übrigen Bedingungen der Aufgabe, die nicht in Gleichung gestellt sind, genügen.

3) Geben daher die Gleichungen, in so ferne sie höhere oder

gar

gar transcendente Gleichungen sind, mehrere oder gar unendlich viele Werthe; sind ferner unter diesen, mehrere oder alle, absolute ganze oder gebrochene Zahlen, so kann die Aufgabe mehrere Auflösungen, kann aber eben so gut auch gar keine Auflösung haben, in so ferne mehrere, in so ferne aber auch gar keiner der absoluten Werthe der Unbekannten, den übrigen nicht in Gleichung gestellten Bedingungen der Aufgabe entsprechen können.

4) Ist aber keiner der Werthe der Unbekannten, die man durch die Auflösung der Gleichungen erhält, eine absolute ganze oder gebrochene Zahl, so hat nothwendig die Aufgabe welche zu dieser Gleichung geführt hat, gar keine Auflösung; d. h. es gibt dann keine Größe oder keine Größen, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisteten.

5) Mehr Auflösungen einer Aufgabe als aus den aufgelößten Gleichungen hervorgehen, kann die Aufgabe, die zu diesen Gleichungen geführt hat, nie haben.

Anmerkung. Man übersehe aber diesen Umstand, daß die Auflösungen der Gleichungen nur dann Auflösungen der Aufgabe der Größenlehre geben, wenn solche auch noch den übrigen Bedingungen der Aufgabe entsprechen, ja nicht. — Eben so wenig übersehe man, daß alle Maaße der Größen absolute ganze oder gebrochene Zahlen seyn müssen.

Beyspiel 1. Das ℔. Chokolade wird mit 18 gGr. verkauft. Hieraus erwächst für den Verkäufer ein Gewinn von $12\frac{1}{2}$ Prozent. Wie viel hat der Zentner dieser Chokolade gekostet. (Den Rthlr. zu 24 gGr. und den Zentner zu 110 ℔. gerechnet).

Auflösung. Es sey x die Zahl der Thaler, welche der Zentner gekostet hat, so ist $\frac{12\frac{1}{2}}{100}$ x die Zahl der Thaler, welche am Zentner gewonnen wird; also $x + \frac{12\frac{1}{2}}{100}$ x die Zahl der Thaler, um welche der Zentner verkauft worden.

Da nun 1 ℔. zu $\frac{3}{4}$ Rthlr. verkauft worden ist, so wurde der Zentner zu $\frac{3}{4} \cdot 110$ Rthlr. verkauft. Also hat man die Verkaufssumme des Zent=

ners doppelt als eine Zahl von Thalern ausgedrückt, einmal durch $\left(x+\frac{12\frac{1}{2}}{100}x\right)$ Rthlr. und das anderemal durch $(\frac{3}{4}\cdot 110.)$ Rthlr.; folglich hat man die Gleichung

$$x+\frac{12\frac{1}{2}}{100}x=\frac{3}{4}\cdot 110,$$

zwischen den unbenannten Zahlen; und diese Gleichung aufgelöst, gibt

$$x=73\frac{1}{3}.$$

Mithin hat der Zentner $73\frac{1}{3}$ Rthlr. gekostet.

Beyspiel 2. Von zwey Courieren X und Z soll der erstere X den andern Z, welcher bereits b volle Tage früher, auch von einem Orte Q ausgereiset ist, welcher um a Meilen näher liegt, als der Ort P, von welchem X ausreiset, einholen und zwar gerade in der Stadt R, welche von dem Orte P um d Meilen abliegt. Der Courier Z macht n Meilen in m Stunden. Wie schnell muß der Courier X reisen?

Auflösung. Es sey x die Zahl der Meilen, welche der Kourier X täglich, oder y die Zahl der Meilen welche derselbe in jeder Stunde zurücklegen muß.

Nun ist

d die Zahl der Meilen der Entfernung PR,
also des Weges von X;

d—a die Zahl der Meilen der Entfernnng QR
d. h. des Weges von Z;

also ist $\frac{d\cdot 24}{x}$ oder $\frac{d}{y}$ die Zahl der Stunden, welche X zu seiner Reise braucht;

und $\frac{(d-a)m}{n}$ die Zahl der Stunden, welche Z zu seiner Reise braucht.

Da nun Z um b volle Tage, also um $24\cdot b$ Stunden früher abgereiset ist, als X, beyde aber zu gleicher Zeit zusammentreffen, so ist

$\frac{24\cdot d}{x}+24b$ oder $\frac{d}{y}+24b$ ebenfalls die Zahl der Stunden, welche Z braucht.

Und weil nun letztere Zeit doppelt ausgedrückt ist, so hat man die Gleichung

$$\frac{(d-a)m}{n}=\frac{24d}{x}+24b;$$

oder die Gleichung

$$\frac{(d-a)m}{n} = \frac{d}{y} + 24b;$$

aus denen

$$x = \frac{24dn}{(d-a)m-24bn},$$

oder $$y = \frac{dn}{(d-a)m-24bn}$$

folgert; während x die Zahl der Meilen ist, welche X täglich, y dagegen die Zahl der Meilen, welche er stündlich macht.

Beyspiel 3. Auf der Peripherie eines Kreises, welche in 360 Theile (Grade genannt) getheilt ist, bewegen sich zwey Punkte; der eine A macht in einer Minute 6 Grade, der andre B in einer Stunde 30 Grad. Jetzt steht A um 45 Grad hinter B. Wann wird A den B zum erstenmale, wann zum zweytenmale, wann zum drittenmale, u. s. w. f. einholen?

Auflösung. Es sey x die Zahl der Minuten, y aber die Zahl der Stunden, welche A braucht, um den B zum erstenmale einzuholen; so stellt 6x oder 6·60·y die Zahl der Grade vor, welche A unterdessen auf der Peripherie durchläuft, während $\frac{30 \cdot x}{60}$ oder 30·y die Zahl der Grade, welche unterdessen B auf der Peripherie durchläuft, vorstellt.

Nun hat aber A die 45 Grade, um welche er gegen B zurück liegt, offenbar mehr zurücklaufen müssen, als B, so daß auch die Zahl seiner durchlaufenen Grade durch

$$\frac{30x}{60} + 45 \quad \text{oder} \quad 30y + 45$$

vorgestellt seyn wird; also daß man hat die Gleichung

$$6x = \frac{30x}{60} + 45;$$

oder die Gleichung

$$6 \cdot 60 \cdot y = 30 \cdot y + 45;$$

woraus sich

$$x = \frac{45 \cdot 60}{330} = \frac{90}{11} = 8\frac{2}{11}$$

oder $y = \frac{45}{330} = \frac{3}{22}$ ergibt.

Nennt man nun z die Zahl der Stunden, welche A braucht, um B zum zweytenmale einzuholen, so ändert sich bloß, wenn z statt des bisherigen y gesetzt wird, der zu machende Weg des A, der jetzt um die

ganze Kreislinie, also um 360 Grade größer ist als der von B, so daß man jetzt die Gleichung hat

$$6 \cdot 60 \cdot z = 30 \cdot z + 45 + 360,$$

mithin

$$z = \frac{405}{330} = 1\frac{5}{22}.$$

Und die Gleichung

$$6 \cdot 60 \cdot v = 30 \cdot v + 45 + 2 \cdot 360$$

gibt $v = 2\frac{7}{22}$,

als die Zahl der Stunden, welche A braucht, um B zum drittenmale einzuholen. U. s. w. f.

Beyspiel 4. Wieviel Vier- und wieviel Sechs-Groschen-Stücke muß man nehmen, um mit 17 Stücken 3 Rthlr. 18 gGr. zu bezahlen?

Auflösung. Es sey x die Zahl der Viergroschenstücke, y die Zahl der Sechsgroschenstücke, so ist 4x die Zahl der Groschen, welche die erstern, und 6y die Zahl der Groschen, welche die andern betragen, so wie x+y die Zahl aller Stücke und 4x+6y die Zahl aller Groschen, welche sie betragen, während erste Zahl auch durch 17, letztere dagegen durch 3·24+18 vorgestellt ist. Man hat daher die beyden Gleichungen

$$1)\ x + y = 17 \quad \text{und} \quad 4x + 6y = 90$$

$$\text{oder} \quad 2)\ 2x + 3y = 45;$$

also $x = 6$ und $y = 11$.

Beyspiel 5. Wie groß ist der Halbmesser einer konzentrisch hohlen Kugel (einer Bombe) von Gußeisen, bei welcher die Eisen-Lage ringsherum a Zoll dick ist, welche b Pf. wiegt, und unter der Voraussetzung, daß ein Kubikfuß Wasser $\frac{3}{5}$ Zentner, das Gußeisen dagegen $7\frac{1}{5}$ mal so viel wiegt, endlich daß ein Fuß 12 Zoll und ein Kubikfuß 1728 Kubikzoll hat? —

Auflösung. Bedeutet R die Zahl der Zolle des gesuchten Halbmessers und r die Zahl der Zolle des Halbmessers der hohlen Kugel, so wird aus der Geometrie als bekannt vorausgesetzt, daß der Inhalt der ganzen Kugel $\frac{4}{3}R^3\pi$ Kubikzolle, und der hohlen Kugel $\frac{4}{3}r^3\pi$ Kubikzolle, also der Inhalt der Eisen-Lage

$$\frac{4}{3}R^3\pi - \frac{4}{3}r^3\pi \quad \text{d. h.} \quad \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$$

ist, unter π die Zahl 3,14159.... verstanden, welche die Länge der halben Kreislinie ausdrückt, deren Radius 1 ist. Da nun ein Kubikfuß

Eisen $7\frac{1}{5} \times \frac{3}{5}$ d. h. $\frac{108}{25}$ Zentner, also $\frac{108 \cdot 110}{25}$, d. h. $\frac{108 \cdot 22}{5}$ U. wiegt, so wiegt ein Kubikzoll davon, den 1728ten Theil, also $\frac{108 \cdot 22}{5 \cdot 1728}$ U. oder $\frac{11}{40}$ U.; und die eben gefundenen $\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ Kubikzolle wiegen nun offenbar $\frac{4}{3}\pi \cdot (R^3 - r^3) \cdot \frac{11}{40} \cdot$ U., d. h. $\frac{11}{30}\pi(R^3 - r^3)$ U., während dasselbe Gewicht auch durch b U., also doppelt ausgedrückt ist, so daß man hat die Gleichung

$$1) \quad \frac{11}{30}\pi \cdot (R^3 - r^3) = b.$$

Ferner ist der Radius der ganzen Kugel offenbar $= r + a$ Zolle; aber auch $= R$ Zolle, also noch

$$2) \quad R = r + a.$$

Löst man nun die beyden Gleichungen nach R auf, r vorher eliminirend, so findet sich

$$R = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{10 \cdot b}{11 \cdot \pi \cdot a} - \frac{a^2}{12}}$$

oder

$$R = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\frac{120 \cdot b - 11 \cdot \pi \cdot a^3}{11 \cdot 12 \cdot \pi \cdot a}},$$

unter der Wurzel ihren positiven Werth gedacht, weil hier der andere Werth von R, wo die Wurzel ihren negativen Werth bekommt, offenbar zwar der Gleichung aber nicht der Aufgabe genügt, weil $R > a$ werden muß. Aber eben weil $R > a$ werden muß, so muß auch

$$+\sqrt{\frac{120b - 11 \cdot \pi \cdot a^3}{11 \cdot 12 \cdot \pi \cdot a}} > \tfrac{1}{2}a$$

oder

$$\frac{120b - 11 \cdot \pi \cdot a^3}{11 \cdot 12 \cdot \pi \cdot} > \tfrac{1}{4}a^3$$

d. h.

$$\frac{10 \cdot b}{11 \cdot \pi} > \tfrac{1}{3}a^3$$

seyn, wenn die Aufgabe selbst möglich seyn, d. h. eine Auflösung zulassen soll. *)

Hätte man unter R, r, und a, die Zahlen der Fuße (und nicht der Zolle) verstanden, so wären die Gleichungen geworden

---

*) Damit also diese Aufgabe möglich sey, reicht es nicht aus, daß die Wurzel in dem Ausdruck für R, reel werde; sondern, wenn auch diese Wurzel reel, also R selbst positiv ist, so ist die Aufgabe doch noch nicht möglich, so lange nicht zugleich die gedachte Wurzel $> \frac{1}{2}a$ wird.

1) $\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)\cdot(7\frac{1}{5})\cdot\frac{3}{5}\cdot 110 = b$

und 2) $R = r+a$;

also $$R = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{5\cdot b}{36\cdot 66\cdot 4\cdot \pi\cdot a} - \frac{a^2}{12}},$$

welches nun die Zahl der Fuße ist, welche der Halbmesser der Kugel hat, und wo aber auch unter a die Zahl der Fuße verstanden worden ist, welche die Dicke der Eisenlage hat.

29. Zusatz.

Sind daher in einer Aufgabe die Größen allgemein gegeben (d. h. nicht wirklich gegeben, sondern nur als gegeben gedacht, so daß ihre Maaße durch allgemeine Zeichen (Buchstaben) bezeichnet und als gegebene Zahlen angesehen werden); gibt daher die Auflösung der Gleichungen für die Unbekannten, allgemeine Ausdrücke, die aber als Zifferntwerthe gedacht werden, so kann man auf die Möglichkeit dieser Aufgabe gar nichts schließen, weil sie für besondere Werthe der gegebenen allgemeinen Maaße möglich seyn und eine Auflösung wirklich zulassen kann, für andere aber auch widerum nicht. — Immer lassen sich aber dann für eine solche Aufgabe Bedingungen festsetzen, welche von den besondern Werthen der allgemein gegebenen Maaße erfüllt seyn müssen, damit die Aufgabe möglich seyn kann, und eine Auflösung zulassen muß. — Unter diesen Bedingungen stehen aber immer diejenigen oben an, welche erfüllt seyn müssen, damit alle unbekannten und gesuchten Maaße der Größen absolute ganze oder gebrochene Zahlen werden. (M. s. d. vorhergh. Beispiel 5.)

30. Zusatz.

Ist in einer Aufgabe der Größenlehre die Abhängigkeit der Größen nicht bestimmt genug angegeben, so können auch die, diese Abhängigkeit ausdrückenden Gleichungen nicht angegeben, und daher die Aufgabe selbst nicht eher gelößt werden, als bis diese Unbestimmtheit (durch irgend eine hinzugefügte Bedingung) gehoben ist.

Indem aber eine solche zu allgemein gegebene Aufgabe nä-

here Bestimmungen erhalten muß, so zerfällt solche, nach den verschiedenen möglichen neuen Bedingungen, durch welche sie in eine völlig bestimmte und deshalb auflösbare Aufgabe übergeht, in verschiedene besondere Aufgaben, welche, wenn nicht eine davon als die gegebene herausgehoben wird, alle einzeln gelößt werden müssen, wenn man eine vollständige und für jeden Fall befriedigende Auflösung der zu allgemein gegebenen Aufgabe haben will.

Beyspiel. Man soll an eine gegebene Kreislinie eine Tangente so ziehen, daß sie zwey andere sich schneidende und gegebene Tangenten dergestalt schneidet, daß das zwischen den Durchschnittspunkten liegende Stück, einer gegebenen Linie a gleich ist. — Der Radius der Kreislinie sey r, und die gegebenen (einander gleichen) Tangenten durch b bezeichnet. (Eigentlich a, b, r sollen die Maaße vorstellen der genannten Linien, für irgend eine beliebige Einheit).

In dieser Aufgabe ist unbestimmt gelassen, 1) auf welcher Seite die Tangente gezogen werden soll, und 2) ob der Berührungspunkt zwischen den beyden Durchschnittspunkten, oder ob einer der Durchschnittspunkte zwischen dem andern Durchschnittspunkt und dem Berührungspunkt zu liegen kommen solle.

Will man daher der Aufgabe bloß genügen, so setzt man irgend einen bestimmten dieser Fälle fest, und löset diese dadurch entstehende besondere Aufgabe auf. Gibt sie eine Auflösung, so hat man eine Tangente gefunden, welche die in der gegebenen Aufgabe verlangten Eigenschaften hat. — Gibt aber diese besondere Aufgabe gar keine Auflösung, entweder weil ihre Gleichungen nicht lauter absolute Zahlen geben, oder weil, wenn auch solche Zahlen gefunden worden sind, diese nicht den übrigen Bedingungen der Aufgabe entsprechen (also immer, weil diese besondere Aufgabe wiedersprechende Bedingungen enthält), so muß man einen zweyten Fall festsetzen, diese zweyte besondere Aufgabe auflösen, und findet dann eine, der gegebenen Aufgabe genügende Auflösung oder nicht. So kann man jeden besondern Fall, den die zu allgemein gegebene Aufgabe zuläßt, einzeln durchgehen, und nur wenn alle einzeln gelößt sind, ist die zu allgemein gegebene Aufgabe als vollständig gelößt anzusehen, so wie umgekehrt, nur wenn man gefunden hat, daß alle besondern Aufgaben, welche die zu allgemein gegebene Aufgabe zuläßt, wiedersprechende Bedingungen enthalten, d. h. keine Auflösung zulassen, man behaupten kann, daß die zu allgemein gegebene Aufgabe überhaupt keine Auflösung zulasse.

31. Zusatz.

Soll daher eine solche zu allgemein gegebene Aufgabe der Größenlehre vollständig gelößt werden, so kann dies nicht anders, als auf folgende Art geschehen:

1) Man bilde durch eine genaue logische Eintheilnng alle möglichen besondern Aufgaben, welche die zu allgemein gegebene in sich begreift. *)

2) Man entwickle für jede dieser besondern Aufgaben die, der Abhängigkeit der Größen ausdrückenden Gleichungen besonders, löse die zu jeder einzelnen der Aufgaben gehörigen Gleichungen besonders auf, prüfe für jede der besondern Aufgaben, ob die aus ihren Gleichungen erhaltenen Werthe der Unbekannten, auch den übrigen Bedingungen dieser besondern Aufgabe entsprechen. Mit einem Worte man löse jede dieser besondern Aufgaben besonders; und alle Auflösungen zusammen, bilden dann die vollständige Auflösung der zu allgemein gegebenen Aufgabe.

Anmerkung. Mit einiger Uebung kann man in vielen Fällen, noch vor dem Auflösen, ja öfter noch vor dem Ansetzen der Gleichungeu, schon sehen, daß die Auflösung einer oder der andern, oder aller, dieser besondern Aufgaben (für gegebene bestimmte Größen) nicht möglich ist, und dadurch die Arbeit bedeutend abkürzen.

32. Zusatz.

Sind in einer solchen zu allgemein gegebenen Aufgabe, die deshalb in mehrere besondere bestimmte Aufgaben zerfällt, die gegebenen Maaße allgemein gegeben (und durch Buchstaben bezeichnet), so werden, wenn man die Benennungen und Bezeichnungen der allgemeinen Aufgabe für jede der besondern Aufgaben beybehält, die für die einzelnen besondern Aufgaben hervorgehenden Glei-

---

*) Wir sagen hier absichtlich: durch eine logische Eintheilung, weil nur diese, gut durchgeführt, vor der Gefahr schützt, einen oder einige der besondern Fälle zu übergehen, und dadurch in vielen Fällen den Zweck der Auflösung gänzlich zu verfehlen.

chungen dasjenige mit einander gemein haben, was auch allen den einzelnen besondern Aufgaben gemeinschaftlich ist (nämlich die Bedingungen der allgemeinen Aufgabe), und daher durch einfache Substitutionen in einander übergehen können. Dann können aber nach (Kap. XIII.) aus der Auflösung der Gleichungen einer dieser Aufgaben, sogleich die Auflösungen der Gleichungen der übrigen besondern Aufgaben unmittelbar durch dieselben Substitutionen erhalten werden. — Dies gewährt in vielen Fällen eine sehr bedeutende Erleichterung bey dem vollständigen Auflösen zu allgemein gegebener Aufgaben.

Beyspiel. In dem Beyspiel zu (30.) erfällt die gegebene Aufgabe in 4 besondere Aufgaben. Soll sie also vollständig gelößt werden, so muß man jede dieser 4 besondern Aufgaben auflösen.

Ist nämlich C der Mittelpunkt der Kreislinie; sind ferner A und B die Berührungspunkte der gegebenen Tangenten (so daß CA=CB=r) und D der Durchschnittspunkt derselben (so daß DA = DB = b). Ist ferner Z der Berührungspunkt der gesuchten Tangente, und X der Durchschnittspunkt derselben mit DA, so wie Y ihr Durchschnittspunkt mit DB, so soll XY = a seyn.

Nun bilden die Punkte D und A auf der (unendlich gedachten) Linie DA drey Regionen, und in jeder derselben kann der Punkt X liegen; eben so bilden die Punkte D und B auf der (als unendlich) gedachten DB ebenfalls 3 Regionen, in deren jeder der Punkt Y liegen kann *). Es sey in jeder der Linien DA und DB unter erster Region diejenige verstanden, welche von D aus vom Kreise abwärts in's unendliche fortgeht, während die zweyte Region zwischen D und A oder zwischen D und B seyn soll. Welches dann in jeder der Linien DA und DB die dritte Region seyn werde, ergibt sich von selbst.

Die möglichen Fälle sind nun folgende:

I. Beyde Punkte X uud Y sind beyde in der dritten Region
II. Beyde Punkte X und Y sind beyde in der zweyten —
III. Der Punkt X in der ersten und Y in der dritten —
IV. Der Punkt Y in der ersten und X in der dritten —,

*) Daß der Punkt X nicht in D oder A selbst, eben so wenig Y in D oder B liegen kann, fällt sogleich in die Augen. — Doch muß man, um keinen Fall entwischen zu lassen, hierauf Rücksicht nehmen.

weswegen die gegebene Aufgabe in diese 4 besondern Aufgaben zerfällt. *)

Wird nun das Maaß von AX bezeichnet durch x
und das Maaß von BY . . . . . y
ſ ist das Maaß von DX
in der dritten Region . . . . . b+x
in der zweyten . . . . . b—x
in der ersten . . . . . x—b
und das Maaß von DY
in der dritten Region bezeichnet durch . . . . b+y
in der zweyten . . . . . b—y
in der ersten . . . . . y—b
und das Maaß von XY
in der Aufgabe I. durch . . . . . x+y
in der Aufgabe II. durch . . . . . x+y
in der Aufgabe III. durch . . . . . x—y
in der Aufgabe IV. durch . . . . . y—x

zu bezeichnen.

In jeder der besondern Aufgaben ist aber

$$XY^2 = DX^2 + DY^2 - 2DX.\ DY.\ \mathit{Cos.}\ (XDY).$$

Nun ist im Falle der Aufgaben (I.) und (II.)

$$\mathit{Cos.}\ XDY = \frac{b^2 - r^2}{b^2 + r^2},$$

im Falle der Aufgaben (III.) und (IV.) dagegen

$$\mathit{Cos.}\ XDY = -\frac{b^2 - r^2}{b^2 + r^2};$$

folglich die Gleichungen, für die Aufgaben

I. $x+y=a$ und $a^2 = (b+x)^2 + (b+y)^2 - 2(b+x)(b+y)\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2}$;

II. $x+y=a$ und $a^2 = (b-x)^2 + (b-y)^2 - 2(b-x)(b-y)\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2}$;

III. $x-y=a$ und $a^2 = (x-b)^2 + (b+y)^2 + 2(x-b)(b+y)\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2}$;

---

*) Die Lage in den 3 Regionen des Punktes X, in Verbindung mit der des Y, gibt eigentlich 9 mögliche Fälle. Allein die bloße Ansicht lehrt sogleich, daß die übrigen 5 Lagen hier verworfen werden müssen.

IV. $y-x=a$ und $a^2=(b+x)^2+(y-b)^2+2(b+x)(y-b)\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2}$.

Löst man nun die Gleichungen für die Aufgabe (I.) auf, so erhält man:

1) $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{a+b}{b}r^2} \\ y=\frac{1}{2}a\mp\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{a+b}{b}r^2} \end{array}\right\}$.

Setzt man aber

statt	x,	y,	a,	b,	r	in (I.)
beziehlich	$-x$,	$-y$,	$-a$,	b,	r	für (II.)
	x,	$-y$,	a,	$-b$,	r	für (III.)
	$-x$,	y,	a,	$-b$,	r	für (IV.),

so erhält man beziehlich die Gleichungen (II. III. und IV.), folglich aus den Auflösungen mittelst derselben Substitutionen die Auflösungen

2) $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}a\mp\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \\ y=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \end{array}\right\}$ für die Gleichungen II.

3) $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \\ y=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \end{array}\right\}$ für die Gleichungen III.

4) $\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}a\mp\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \\ y=\frac{1}{2}a\mp\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \end{array}\right\}$ für die Gleichungen IV.

Nun man für jede der 4 besondern Aufgaben die Auflösungen der Gleichungen hat, darf man nur untersuchen, ob diese für jede Aufgabe gefundenen Werthe der Unbekannten auch den übrigen Bedingungen der Aufgabe genügen, also Auflösungen der Aufgaben selbst an die Hand geben.

Betrachten wir aber jede der Auflösungen der 4 verschiedenen Paare von Gleichungen, so sieht man sogleich, daß jede derselben zwey Auflösungen gibt, nämlich zwey Systeme von Werthen für x und für y,

welche den gegebenen Gleichungen genügen, und welche dadurch erhalten werden, daß man in den obigen Gleichungen für x uud für y, beyde obern (+) oder (—) Zeichen zugleich, oder beyde untern zugleich statt finden läßt.

Damit nun die Auflösungen (1.) den übrigen Bedingungen der Aufgabe (I.) entsprechen, müssen die Werthe von x und von y absoluten Zahlen gleich werden. Es muß also nicht nur jede Wurzel reel werden, welches erfordert, daß

$$\alpha)\quad \tfrac{1}{4}a^2 \geqq \frac{a+b}{b}r^2 \quad \text{sey,}$$

sondern es muß auch noch:

$$\beta)\quad \tfrac{1}{2}a > \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a+b}{b}r^2}$$

seyn, wo die Wurzel eine absolute Wurzel ist.

Dann ist aber auch

$$\tfrac{1}{4}a^2 > \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a+b}{b}r^2.$$

Und weil dies letztere, in so ferne a, b, r, absolute Zahlen sind, allemal der Fall seyn muß, so bleibt bloß noch die Bedingung (α) übrig, welche von den Werthen von a, b und r erfüllt seyn muß, wenn die Aufgabe (I.) eine Auflösung haben soll; und ist diese Bedingung erfüllt, so hat die Aufgabe (I.) auch jedesmal zwey Auflösungen.

Ist aber

$$\tfrac{1}{4}a^2 \geqq \frac{a+b}{b}r^2,$$

so ist auch $$\left(\tfrac{1}{2}a - \frac{r^2}{b}\right)^2 \geqq \left(\frac{r}{b}\cdot\sqrt{b^2+r^2}\right)^2.$$

Umgekehrt, ist entweder

$$\tfrac{1}{2}a - \frac{r^2}{b} \geqq \frac{r}{b}\sqrt{b^2+r^2},$$

oder $$-\tfrac{1}{2}a + \frac{r^2}{b} \geqq \frac{r}{b}\sqrt{b^2+r^2},$$

so ist auch $$\left(\tfrac{1}{2}a - \frac{r^2}{b}\right)^2 \geqq \frac{r^2}{b^2}(b^2+r^2),$$

und dann auch $$\tfrac{1}{4}a^2 \geqq \frac{a+b}{b}r^2.$$

Die Bedingung der Möglichkeit der Aufgabe (I.) reduzirt sich also auf

$$(\gamma)\qquad \tfrac{1}{2}a - \frac{r^2}{b} \geqq \frac{r}{b}\sqrt{b^2+r^2}$$

oder (δ) $$-\tfrac{1}{2}a+\frac{r^2}{b}\gtreqless\frac{r}{b}\sqrt{b^2+r^2},$$

wo überall die Wurzel ihren absoluten Werth repräsentirt. — Die Bedingung (δ) würde aber geben

$$\frac{r}{b}\cdot(r-\sqrt{b^2+r^2})\gtreqless\tfrac{1}{2}a,$$

was nie möglich ist, weil $r-\sqrt{b^2+r^2}$ immer einer negativen Zahl gleich ist; folglich kann die Bedingung (δ) nie erfüllt werden, und es bleibt also ganz allein die Bedingung (γ)

oder $$\tfrac{1}{2}a\gtreqless\frac{r}{b}\cdot(r+\sqrt{b^2+r^2}),$$

welche jedesmal erfüllt seyn muß, wenn die Aufgabe (I.) Auflösungen zulassen soll.

Man kann auch noch bemerken, daß diese Bedingung (γ) nöthig ist, damit die Wurzeln reel werden. — Sind diese Wurzeln reel, so werden die Werthe von x und von y, in diesem Fall, immer absolute Zahlen.

Dabey hat die Aufgabe (I.), wenn sie eine Auflösung hat, auch jedesmal deren zwey.

Untersuchen wir nun eben so die Gleichungen (2). Auch sie müssen für x nnd y nicht bloß reele, sondern auch absolute Werthe geben. Es muß daher, damit die Aufgabe (II.) möglich seyn soll

$$(\varepsilon)\quad \tfrac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2\gtrless 0$$

und (ζ) $$\tfrac{1}{2}a>\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2}$$ seyn.

Die Bedingung (ζ) gibt

$$\tfrac{1}{4}a^2>\tfrac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2,$$

oder $$0>\frac{a-b}{b}r^2,$$

oder (ζ) $$b>a.$$

Die Bedingung (ε) dagegen gibt

$$\tfrac{1}{4}a^2+\frac{r^2}{b}a+\frac{r^4}{b^2}\gtreqless\frac{r^2}{b^2}(b^2+r^2),$$

oder $$\tfrac{1}{2}a+\frac{r^2}{b}\gtreqless\frac{r}{b}\sqrt{b^2+r^2}$$

oder (ϑ) $$\tfrac{1}{2}a\gtreqless\frac{r}{b}(-r+\sqrt{b^2+r^2}).$$

Umgekehrt: sind die Bedingungen (ζ) und (ϑ) erfüllt, so sind es auch die Bedingungen (ζ) und (ε), und die Aufgabe (II.) ist dann möglich, und läßt jedesmal sogleich zwey Auflösungen zu.

Dabey kann man bemerken, daß wenn (ϑ) erfüllt ist, die Wurzeln reel werden, und daß (ζ) die Bedingung der absoluten Werthe ist.

In Bezug auf die Aufgabe (III.) muß, damit sie möglich ist, wiederum die vorige Bedingung (ε) oder (ϑ), dabey aber noch die neue:

$$\tfrac{1}{2}a < \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a-b}{b}r}$$

d. h.

$$a < b$$

statt haben. Weil aber, wenn $a > b$, auch die Bedingung (ε) nothwendig erfüllt ist, so hat man, damit die Aufgabe (III.) möglich ist, die einzige Bedingung, daß

$$(\lambda) \qquad a > b.$$

Zugleich sieht man, daß wenn man in den Auflösungen (3) die untern (+ oder −) Zeichen gebrauchte, der Werth von y nothwendig negativ werden würde, weshalb diese beyden Auflösungen der Gleichungen (III.), auch wenn die Bedingung, daß

$$a > b,$$

erfüllt ist, doch nur eine Auflösung der Aufgabe (III.) geben.

Die Aufgabe (IV.) ist offenbar in demselben Falle möglich, in welchem die (III.) möglich ist. Auch hat sie, selbst wenn sie möglich ist, immer nur eine Auflösung.

Stellt man die Bedingungen der Möglichkeit dieser 4 Aufgaben zusammen, so findet man:

Die Aufgabe

I. ist möglich, wenn $\tfrac{1}{2}a \overset{=}{>} \frac{r}{b}(r + \sqrt{b^2 + r^2})$; und hat dann immer zwey Auflösungen;

II. ist möglich, wenn

$$\tfrac{1}{2}a \overset{=}{>} \frac{r}{b}(-r + \sqrt{b^2 + r^2})$$

und zugleich

$$a < b,$$

und sie hat dann immer zwey Auflösungen.

Die Aufgaben

III. und IV. dagegen sind allemal möglich, wenn $a > b$, und jede derselben hat dann jedesmal nur eine einzige Auflösung.

Vergleicht man diese Bedingungen, so erhellet noch:

A) Man kann den Buchstaben a, b und r solche (absolute) Werthe geben, daß die Aufgabe (II.) ganz allein möglich, die (I.), (III.) und (IV.) dagegen unmöglich werden.

B) Man kann den Buchstaben a, b und r solche Werthe geben, daß (II.) und (I.) zugleich möglich werden; weil, wenn

$$\tfrac{1}{2}a \gtreqless \frac{r}{b}(r+\sqrt{b^2+r^2}) \quad \text{ist}$$

auch jedesmal

$$\tfrac{1}{2}a \gtreqless \frac{r}{b}(-r+\sqrt{b^2+r^2})$$

seyn muß.

C) Die Aufgaben (III.) und (IV.) sind immer zugleich möglich und keine derselben mit der Aufgabe (II.) zugleich möglich, daher sind

D) nie alle 4 Aufgaben zu gleicher Zeit möglich, obgleich

E) den Buchstaben a, b und r auch solche Werthe gegeben werden können, daß (I.) und (III.) und (IV.) zugleich möglich werden.

Die Auflösungen (1.) geben nie

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0.$$

Dagegen werden in (2), (3) und (4) entweder x und y, oder doch x allein, oder y allein der Null gleich, wenn $b = a$, und zeigen daher allemal eine Unmöglichkeit dieser 3 Aufgaben (II.), (III.) und (IV.) an, in diesem Fall wo $b = a$, wie daß auch schon aus den Bedinguugen hervorgeht. — Dagegen reduzirt sich die Bedingung der Möglichkeit der Aufgabe (I.) für diesen Fall auf

$$\tfrac{1}{8}a^2 \gtreqless r^2$$

oder

$$a^2 \gtreqless 8r^2.$$

33. Zusatz.

Gibt eine Gleichung (A) die Auflösung

$$x = -\alpha,$$

wo α eine absolute, $-\alpha$ daher eine negative Zahl ist, so entspricht der Werth

$$x = \alpha$$

allemal einer andern Gleichung (B), welche aus (A) erhalten wird, indem man $-x$ statt x schreibt.

Denn da (B) aus (A) hervorgeht durch diese Substitution, so

geht auch die Auflösung von (B) aus der Auflösung von (A), nämlich aus

$$x = -\alpha,$$

hervor durch dieselbe Substitution (Kap. XIII.) und (B) gibt daher als Auflösung

$$-x = -\alpha \quad \text{oder} \quad x = \alpha.$$

Dieser Werth $x = \alpha$ leistet also der zweyten Gleichung (B) ein Genüge, und entspricht daher jeder Aufgabe, welche zu dieser Gleichung (B) führt, wenn nur derselbe Werth α auch den übrigen Bedingungen einer jeden dieser Aufgaben entspricht.

34. Zusatz.

Gibt eine Gleichung (A) für den Unbekannten x mehrere Auflösungen, darunter eine oder mehrere negative, etwa

$$x = -\alpha, \quad x = -\beta, \text{ u. s. w.}, \quad x = \gamma, \quad x = \delta,$$

so entsprechen die Auflösungen

$$x = \alpha, \quad x = \beta, \text{ u. s. w.} \quad x = -\gamma, \quad x = -\delta$$

der Gleichung (B)', welche aus (A) dadurch erhalten wird, daß man in (A) überall $-x$ statt x schreibt. — Die absoluten Werthe α und β entsprechen daher jeder Aufgabe, welche zu dieser Gleichung (B) führt, wenn sie nur sonst noch den übrigen Bedingungen einer jeden dieser Aufgaben entsprechen.

35. Zusatz.

Allgemein: geben mehrere Gleichungen, A, B, C, D, &c., welche einer Aufgabe entsprechen, für ihre Unbekannten x, y, z, v, u. s. w. ein oder mehrere Systeme von Werthen (d. h. zusammengehörige Werthe), darunter z. B. das System

$$x = \alpha, \quad y = -\beta, \quad z = -\gamma, \quad v = \delta, \text{ u. s. w.},$$

so genügt das System

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma, \quad v = \delta, \text{ u. s. w.}$$

denjenigen Gleichungen, A^1, B^1, C^1, D^1 u. s. w. welche aus den erstern A, B, C, D, ... durch Substitution von $-y$ statt y, $-z$ statt z u. s. w., x und v statt x und v, abgeleitet werden, folglich auch jeder Aufgabe, welche zu diesen neuen Gleichungen A^1, B^1, C^1, D^1, u. s. w. führt, wenn nur die absoluten Auflö-

lösungen α, β, γ, δ, u. s. w. auch noch den übrigen Bedingungen einer jeden solchen Aufgabe entsprechen.

Nimmt man also statt der negativen Werthe $-\beta$, $-\gamma$, u. s. w. die absoluten Werthe β und γ, so entsprechen diese allen denjenigen Aufgaben, welche mit der gegebenen dergestalt in Verbindung stehen, daß ihre Gleichungen A^1, B^1, C^1, D^1, u. s. w. aus denen A, B, C, D, u. s. w. der gegebenen Aufgabe, durch bloße Substitution von $-y$ statt y und $-z$ statt z u. s. w. hervorgehen.

Beyspiel. Gehen wir zu der in den Beyspielen zu (30.) und (32.) behandelten Aufgabe zurück. — Die Aufgabe (II.) gab die Gleichungen

$$(A)\ x+y=a, \text{ und } (B)\ a^2=(b-x)^2+(b-y)^2-2(b-x)(b-y)\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2};$$

und diese geben in (2.) die beyden Systeme von Werthen

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \\ y=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \end{array}\right\}$$

und

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \\ y=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \end{array}\right\}.$$

Ist nun $\frac{1}{2}a<\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2}$

oder, was dasselbe ist,

$$a>b,$$

so wird im ersten System

$$x=-\alpha \quad \text{und} \quad y=\beta,$$

und im zweyten

$$x=\beta \quad \text{und} \quad y=-\alpha,$$

wo α und β beziehlich die absoluten Zahlen

$$-\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2}$$

vorstellen. — Die Auflösung der Aufgabe (II.) ist daher, wegen der

negativen Werthe, welche x im ersten System und y im zweyten, für diesen Fall daß $a > b$, bekommen, nicht möglich, sondern enthält einander widersprechende Bedingungen.

Die Auflösungen

$$x = \alpha \quad \text{und} \quad y = \beta$$

des ersten Systems entsprechen aber nun den neuen Bedingungsgleichungen

$$(A^1) \qquad -x+y = a$$

und (B^1) $$a^2 = (b+x)^2+(b-y)^2-2(b+x)(b-y)\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2},$$

die aus (A) und (B) durch Substitution von $-x$ statt x hervorgehen. Diese Werthe

$$x = \alpha \quad \text{und} \quad y = \beta$$

entsprechen daher jeder Aufgabe, welche zu diesen neuen Gleichungen führt, wenn sie nur sonst den übrigen Bedingungen einer jeden dieser Aufgaben genügen. — Und in so ferne die Aufgabe (IV.) gerade zu diesen Gleichungen führet, entsprechen diese Werthe

$$x = \alpha, \qquad y = \beta$$

auch der Aufgabe (IV.).

Anmerkung. Diese einfache, klare und strenge Theorie wird wohl, ohne noch viel darüber sagen zu müssen, hinlänglich seyn, um die bisher in deutschen Elementar-Werken so oft wiederholte Behauptung, „daß negative Auflösungen der Gleichungen allemal in entgegengesetzter Beziehung genommen werden uud dann Auflösungen eines andern besondern Falles einer allgemeinen Aufgabe geben müssen," als unrichtig und deshalb verwerflich, an das Licht treten zu lassen. Diese Behauptung kann in mehreren, ja in vielen Beyspielen bestätigt seyn; wir selbst werden in der (später folgenden) Raumgrößenlehre einen sehr weit umfassenden Fall nachweisen, in welchem sie nothwendig statt finden muß; allein im allgemeinen findet sie nicht statt, und ist daher solche geradezu unrichtig und falsch.

Wir wollen dies noch durch ein Beyspiel nachweisen. Es sey nämlich wiederum die in den Beyspielen zu (30. und 32.) behandelte Aufgabe gegeben, jedoch außer den übrigen Bedingungen noch die neue hinzugefügt, daß die gesuchte Tangente zwischen ihren Durchschnittspunkten ganz in der Fläche des Winkels liegen soll, welchen die beyden Tangenten **AD** und **BD** mit einander bilden.

Offenbar ist auch diese Aufgabe zu allgemein; und es muß daher solche wieder in alle möglichen besondern Aufgaben zerlegt werden.

Geschieht dies, so findet man sogleich, daß diese Aufgabe nur zwey besondere Aufgaben zuläßt uud zwar die (I.) und die (II.), während die (III.) und die (IV.) gar nicht berücksichtigt werden dürfen. Es seyen nun diese beyden Aufgaben (I.) und (II.) wie oben gelehrt wurde, aufgelößt. Es sey ferner in einem besondern Fall

$$a > b$$

und zugleich

$$\tfrac{1}{2}a \gtreqless \frac{r}{b}(r+\sqrt{b^2+r^2}),$$

so gibt die Aufgabe (II.) als Auflösung ihrer Gleichungen, für x und y die beyden Systeme von Werthen

$$x = -\alpha, \qquad y = \beta$$

und

$$x = \beta, \qquad y = -\alpha,$$

wo α und β beziehlich die absoluten Zahlen

$$-\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2}$$

vorstellen.

Die Aufgabe (II.) wo X und Y in den zweyten Regionen liegen, ist daher für diesen Fall nicht möglich, und enthält wiedersprechende Bedingungen. — Wollte man nun der gewöhnlichen Ansicht folgen, so müßte der Werth α für AX, in die entgegengesetzte Richtung getragen, so daß X statt in die zweyte Region zu kommen, jetzt in die dritte zu liegen käme, während Y, wegen BY oder y positiv, in der ersten oder in der zweyten Region bliebe, eine Auflösung der allgemeinen Aufgabe geben; eben so müßte, nach der gewöhnlichen Meinung, weil das zweyte System

$$x = \beta, \qquad y = -\alpha,$$

y negativ gab, dieser Werth α für BY oder y, in die entgegengesetzte Richtung getragen, (so daß Y in die dritte Region zu liegen käme, während X, wegen AX oder x positiv, noch in der ersten oder zweyten Region bliebe), den andern besondern Fall der allgemeinen Aufgabe, der noch übrig ist, lösen. — Beydes ist aber, wie man sich angenblicklich durch die bloße Ansicht überzeugen kann, nicht der Fall. — Nichtsdestoweniger hat die Aufgabe, allgemein wie sie gegeben ist, unter den hier gemachten Voraussetzungen, wirklich eine Auflösung, in so ferne die Aufgabe (I.) gerade für die hier angenommenen Werthe von a, b und r, möglich ist und zwey Auflösungen zuläßt. — Merkwürdig ist dabey, daß gerade diese Auflösungen der Aufgabe, das AX und das BY in einer, der in (II.) angenommenen, entgegengesetzten Richtung, enthalten, in so ferne in (II.) die Punkte X und Y in den zweyten Regio-

nen angenommen sind, während sie in (I.) in den dritten Regionen liegen. Aber die Werthe von AX und BY sind von den vorigen Werthen α und β, oder β und α ganz verschieden, wie augenblicklich aus der bloßen Ansicht der aufgelößten Gleichungen für (I.) und für (II.) hervorgeht.

Der Werth α aus der Auflösung

$$x = -\alpha,$$

in die entgegengesetzte Richtung getragen, gibt also doch nicht den Punkt X, der wirklich in der entgegengesetzten Richtung liegt, und die allgemeine Aufgabe wirklich löst.

Wir können diese Gelegenheit nicht vorbeygehen lassen, ohne noch eine andere Behauptung zu berichtigen, die ebenfalls sehr häufig gefunden, und ebenfalls nicht in dem Umfange richtig ist, für welchen sie ausgesprochen wird.

Man sagt nämlich gewöhnlich, daß wenn eine Aufgabe imaginäre Werthe gebe, so wäre sie unbedingt unmöglich. — Nehmen wir dieselbe Aufgabe, die wir so eben betrachteten, wieder hervor:

es sey $a < b$,

und zugleich $\frac{1}{2}a \geqq \frac{r}{b}(-r+\sqrt{b^2+r^2})$,

während $\frac{1}{2}a < \frac{r}{b}(r+\sqrt{b^2+r^2})$ seyn soll,

so gibt die Aufgabe (I.) für x und für y imaginäre Werthe. Wollte man nun hieraus schließen, daß es überhaupt keine Tangente gebe, welche mit allen ihren zwischen X und Y liegenden Punkten in der Fläche des Winkels ADB liegt, und sonst den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so würde man sich sehr irren; denn während (I.) zu Auflösungen zwey zusammengehörige imaginäre Werthe gibt, ist die Auflösung von (II.) möglich, so daß man dennoch für diesen Fall zwey Tangenten erhält, welche allen Bedingungen der gegebenen Aufgabe entsprechen.

Hätte man daher für solche besondere Werthe von a, b, r, die Aufgabe auf die gewöhnliche Art gelößt, nicht vorher alle besondere Fälle aufgesucht (durch logische Eintheilung), welche diese Aufgabe enthalten kann, die Tangente bey der besondern Auflösung so liegend gedacht, wie dies in (I.) der Fall ist, so hätte man für x und für y zwey Systeme imaginärer Werthe erhalten, daraus geschlossen, daß die Aufgabe überhaupt keine Auflösung zulasse (nach den so häufig gefunde-

nen Beyspielen ähnlicher Art), und sonach wären die beyden Auflösungen, welche diese Aufgabe in diesem Falle wirklich hat, geradezu entwischt.

Es ist daher selbst à posteriori nachgewiesen, daß nur obige in den Text-Nummern aufgestellte Theorie allein, die Irrthümer zu berichtigen und die Fehler zu vermeiden lehrt, welche bisher so häufig, in diesem Theile der Elementar-Mathematik, statt gefunden haben.

Zahlenlehre.

Vierzehntes Kapitel.

Fortsetzung der Ziffernrechnung. In's Besondere Rechnung mit allgemein-numerischen Ausdrücken, d. h. mit Ausdrücken von der Form $p+q\sqrt{-1}$.

Vorerinnerung.

In dem 7ten Kapitel haben wir gelehrt, wie ganze Zahlen, numerisch ausgedrückt, addirt, subtrahirt, multiplizirt, dividirt, potenzirt, radizirt und logarithmirt werden, d. h. wie man wieder, so oft solches möglich ist, solche numerische Zahlen findet, welche den genannten Verbindungen der beyden gegebenen numerischen Zahlen gleich sind. — Indem man nachgehends die Formeln der 3 ersten Kapitel zu Hülfe nimmt, kann man auch gebrochene und gemischte und positive und negative Zahlen, also reele Zahlen, deren einzelnen Theile numerisch sind, durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenziren, Radiziren und Logarithmiren mit einander verbinden, und die Endresultate jedesmal wieder, so oft solches möglich ist, in ähnliche reele Zahlen ausdrücken, d. h. in positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen, deren einzelne Bestandtheile numerische ganze Zahlen sind.

Durch die Einführung der allgemeinen Quadratwurzel, und der allgemeinen Kubik- und Biquadrat-Wurzeln, überhaupt durch die vorhergehenden allgemeinen Auflösungen der höhern Gleichungen bis zum 4ten Grade, mit reelen Koeffizienten, sind aber, neben den reelen Zahlen, neue spezielle Zahlformen hervorgegangen, [immer urspringlich von absoluten ganzen (wirklichen) Zahlen ausgehend], welche wir mit dem Namen der imaginären Zahlen belegt haben, welche jedoch immer in der bestimmten Form $P+Q\sqrt{-1}$ erscheinen, wo P und Q beliebige der reelen Zahlen seyn können. Und in dieser Form $P+Q\sqrt{-1}$ kann man sich selbst alle reelen Zahlen vorgestellt denken, weil man nur $Q = 0$ zu nehmen, dagegen P beliebig reel sich zu denken hat. Ein solcher Ausdruck $p+q\sqrt{-1}$ ist daher der allgemeinste unter den speziellen Zahlformen, weil er sie allein sich schließt, und er wird hier ein allgemeinnumerischer Ausdruck genannt. — Das gegenwärtige Kapitel aber ist dazu bestimmt, nachzuweisen, wie die Resultate zweyer durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzirung, Radiziren nnd Logarithmiren verbundener Ausdrücke, welche von dieser Form $P+Q\sqrt{-1}$ sind und eben so gut reel als auch imaginär seyn können, in Ausdrücke wieder von derselben Form verwandelt werden, so oft nämlich solches mit den bisher entwickelten Hülfsmitteln, und bei dem bisherigen besondern Zustand unserer Begriffe der Potenz, der Wurzel und des Logarithmen möglich ist.

Endlich soll dieses Kapitel auch noch nachweisen, daß überhanpt alle bis jetzt erhaltenen Ausdrücke die ursprünglich den ganzen Zahlen der Zahlenreihe ihr Entstehen verdanken, sie mögen nun direkt zusammengesetzt oder als die Unbekannten einer Gleichung des 2ten, 3ten oder 4ten Grades angesehen seyn, auch wenn die Koeffizienten dieser Gleichungen selbst wieder beliebig auf dieselbe Weise entstanden gedacht werden, allemal die Form $p+q\sqrt{-1}$ annehmen können, wo p und q reele Ausdrücke vorstellen.

§. 321. Lehrsätze.

I. Sind m und m_1 zwey positive ganze Zahlen und $\frac{P}{q}$, so wie $\frac{P_1}{q_1}$, zwey ächt gebrochene ebenfalls positive Zahlen, und ist dabey

1) $m+\frac{P}{q} = m_1+\frac{P_1}{q_1}$ gegeben,

so ist nothwendig

$$m = m_1 \quad \text{und} \quad \frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}.$$

II. Sind m und n reel vorausgesetzt, und ist dabey

$$m^2 + n^2 = 0,$$

so muß auch

$$m = 0 \quad \text{und} \quad n = 0$$

seyn.

Beweis I. Denn wären m und m_1 nicht einander gleich, so wäre m oder m_1 die größere Zahl, z. B. m.

Dann wäre

$$m - m_1 + \frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1};$$

d. h. der ächte Bruch $\frac{p_1}{q_1}$ größer als die ganze Zahl $m - m_1$, welches nicht möglich ist; also ist $m = m_1$; und dann auch $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$.

Beweis 2. Denn wäre m negativ oder positiv, so wäre m^2 positiv, und dann n^2 negativ, nämlich $= 0 - m^2$, also n nicht reel.

Anmerkung. Und weiß man, daß $\frac{p}{q}$ und $\frac{p_1}{q_1}$ in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, so ist auch noch zu gleicher Zeit $p = p_1$ und $q = q_1$, nach (§. 132.).

§. 322. Erklärung.

Eine beliebige der beyden Formen $+\sqrt{-1}$ oder $-\sqrt{-1}$, welche beyde in der Form $\sqrt{-1}$ gedacht werden müssen, wollen wir von nun an immer durch den Buchstaben i des kleinern lateinischen Alphabets, bezeichnen.

Anmerkung. Es stellt also i, so oft solches auch immer vorkommt, doch immer einen und denselben der beyden, in der allgemeinen Form $\sqrt{-1}$ enthaltenen speziellen Formen $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ vor, so daß die beyden Form-Werthe von $\sqrt{-1}$ auch durch

$$+i \quad \text{und} \quad -i$$

vorgestellt werden können.

§. 323. Lehrsätze.

Es ist allemal nicht bloß $i^0 = 1$, sondern auch:

1) $i^1 = i$; 2) $i^2 = -1$; 3) $i^3 = i$; 4) $i^4 = +1$;
5) $i^5 = i$; 6) $i^6 = -1$; 7) $i^7 = i$; 8) $i^8 = +1$;
9) $i^{4n+} = i$; 10) $i^{4n+2} = -1$; 11) $i^{4n+3} = -i$;

$$12)\ i^{4n+4} = i^{4n} = +1;$$

wenn n, Null oder jede ganze positive oder negative Zahl bedeutet.

Beweis. Denn es ist

$$i^{4n} = (i^4)^n = (+1)^n = +1,$$

sowohl wenn n eine positive, als auch eine negative ganze Zahl ist, nach (§. §. 154. 155.). Dabey aber ist noch

$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i;\quad i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2;\quad i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3;\ \text{ꝛc. ꝛc.}$$

§. 324. Zusatz.

Die beyden Werthe von $\sqrt{-a}$ kann man daher nun auch so schreiben $+i \cdot \sqrt{a}$ und $-i \cdot \sqrt{a}$, wo $\sqrt{a}$ einen beliebigen ihrer beyden Werthe vorstellt.

§. 325. Lehrsatz.

Sind p, q, p_1 und q_1 beliebige reele Zahlen, und dabey

$$1)\ p + q \cdot i = p_1 + q_1 \cdot i \qquad \text{gegeben,}$$

so muß nothwendig auch

$$p = p_1 \quad \text{und} \quad q = q_1 \qquad \text{seyn.}$$

Beweis. Denn aus der Gleichung (1.) folgt:

$$2)\ p - p_1 = (q_1 - q)i.$$

Wäre nun nicht $q = q_1$, also $q_1 - q$ nicht Null, so folgerte

$$3)\ \frac{p - p_1}{q_1 - q} = i;$$

d. h. die $\sqrt{-1}$ wäre der reelen Zahl $\frac{p - p_1}{q_1 - q}$ gleich, was offenbar ein Widerspruch ist. — Also muß $q = q_1$ und dann auch $p = p_1$ seyn.

Anmerkuug. Man muß sich aber sehr hüten, den Satz (§. 321.) und den vorstehenden da anzuwenden, wo die Bedingungen, unter denen sie erwiesen sind, nicht statt finden. Namentlich darf dieser letztere nicht angewandt werden, so lange p oder p_1, q oder q_1 noch allgemein, also nicht nothwendig reel sind. — So ist z. B.

$$2+3\sqrt{-1} = (3\sqrt{-1})-(2\sqrt{-1})\cdot\sqrt{-1}$$

d. h. $2+3\cdot i = (3i)-(2i)\cdot i$

d. h. $p+q\cdot i = p_1+q_1\cdot i,$

wenn man unter p, q, p_1 und q_1 beziehlich die Werthe 2, 3, 3i und $-2i$, vorgestellt sich denkt. Wer aber daraus folgern wollte, daß nun $p = p_1$ und $q = q_1$ d. h. $2 = 3i$ und $3 = -2i$ seyn müsse, der würde gewaltig irrige Resultate hervorbringen.

§. 326. Zusatz.

Sind daher p und q nicht imaginäre Ausdrücke, dabey aber

$$p+q\cdot i = 0,$$

so muß einzeln

$$p = 0 \quad \text{und} \quad q = 0$$

seyn.

§. 327. Aufgabe.

Die beyden Ausdrücke $p+qi$ und p_1+q_1i, wo p, p_1, q und q_1 reel sind, zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliziren und zu dividiren, zu, von, mit und durcheinander; unter der Bedingung, daß die Resultate auf dieselbe Form gebracht werden sollen.

Auflösung. Es ist

1) $(p+qi)+(p_1+q_1i) = (p+p_1)+(q+q_1)\cdot i;$

2) $(p+qi)-(p_1+q_1i) = (p-p_1)+(q-q_1)\cdot i;$

3) $(p+qi)\cdot(p_1+q_1i) = (pp_1-qq_1)+(pq_1+p_1q)\cdot i;$

4) $$\frac{p+qi}{p_1+q_1i} = \frac{pp_1+qq_1}{p_1^2+q_1^2}+\frac{p_1q-pq_1}{{}_1^2+q_1^2}\cdot i.$$

Beweise. Die Nummern (1. 2. und 3.) ergeben sich von selbst. — Um aber $\frac{p+qi}{p_1+q_1i}$ auf dieselbe Form zu bringen, hat man Zähler und Nenner mit p_1-q_1i, multiplizirt.

Anmerkung. Man konnte auch die (Nr. 4.) so finden: Man suchte x und y so, daß sie reel sind, und daß

1) $\frac{p+qi}{p_1+q_1i} = x+yi$ wird.

Dann hat man

2) $p+qi = (p_1x-q_1y)+(p_1y+q_1x)i;$

folglich nach (§. 325.):

3) $p = p_1x - q_1y$ und 4) $q = q_1x + p_1y$,

woraus sich sogleich x und y, und noch überdies beyde als reele Ausdrücke finden lassen.

§. 328. Aufgabe.

Man soll den Ausdruck $p+qi$, wo p und q reel sind, mit 2, 3 und 4 potenziren, d. h. aber, die Resultate auf dieselbe Form bringen.

Auflösung. Man hat nach (§. 149. Lehrs. 1.) in Verbindung mit (§. 327.):

1) $(p+qi)^2 = (p^2-q^2)+2pq\cdot i$;

2) $(p+qi)^3 = (p^3-3pq^2)+(3p^2q-q^3)\cdot i$
$= p(p^2-3q^2)+q(3p^2-q^2)\cdot i$;

3) $(p+qi)^4 = (p^4-6p^2q^2+q^4)+(4p^3q-4pq^3)\cdot i$
$= (p^4-6p^2q^2+q^4)+4pq(p^2-q^2)\cdot i$.

Anmerkung. Man kann auch $(p+qi)^m$, wenn m eine Differenz ganzer Zahlen ist, auf dieselbe Form $P+Qi$ bringen, weil alle Produkte und alle Quotienten solcher Ausdrücke, nach (§. 327.) allemal wieder Ausdrücke von derselben Form werden.

§. 329. Aufgabe.

Man soll aus $p+qi$, wo p und q reel sind, die Quadratwurzel ausziehen; d. h. aber, das Resultat auf dieselbe Form bringen.

Auflösung. Es werden hier reele Werthe für x und y gesucht und so, daß

1) $\sqrt{p+qi} = x+y\cdot i$,

also 2) $p+qi = (x+yi)^2 = (x^2-y^2)+2xy\cdot i$,

demnach, dem (§. 325.) gemäß,

3) $p = x^2-y^2$ und 4) $q = 2xy$ wird.

Diese letztern beyden Gleichungen aufgelöst geben aber, nach (§. 300.), 4 Werthe für x, und zu jedem Werth von x, einen zugehörigen Werth von y, nämlich

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}}$$

und $$y = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}},$$

wo die innere Wurzel, d. h. $\sqrt{p^2+q^2}$, noch zweydeutig, bey der äußern dagegen die Zweydeutigkeit auf das vorgesetzte (+ oder —) Zeichen geworfen ist, so daß diese äußere Wurzel selbst als eindeutig angesehen werden kann. —

Von diesen Werthen von x und y, muß man nun zuerst die zusammengehörigen heraussuchen, welche die beyden gegebenen Gleichungen (3. und 4.) zugleich identisch machen; nachgehends aber von den 4 Paaren zusammengehöriger Werthe, welche den Gleichungen (3. und 4.) genügen, die reelen herausnehmen, welche allein auch den übrigen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Weil nun $x^2-y^2 = p$ werden soll, so muß in beyden Ausdrücken (für x und y) die $\sqrt{p^2+q^2}$ durchaus immer einen und denselben ihrer Werthe vorstellen. Und weil $2xy = q$ werden soll, so müssen die äußern (+ oder —) Zeichen in den beyden Ausdrücken für x und y so genommen werden, daß x und y einerlei (+ oder —) Zeichen haben, wenn q positiv, dagegen verschiedene (+ oder —) Zeichen, wenn q negativ seyn sollte. — Ferner ist $\sqrt{p^2+q^2}$ allemal größer als p; also werden x und y imaginär, wenn man von $\sqrt{p^2+q^2}$ ihren negativen Werth nehmen wollte; dagegen reel, wenn, wie dies also hier geschehen muß, $\sqrt{p^2+q^2}$ positiv genommen wird.

Von den 4 Werthen von x und y, welche den Gleichungen (3. und 4.) genügen, entsprechen also nur zweye, nämlich die beyden reelen, unserer gegenwärtigen Aufgabe, und man findet

$$\sqrt{p+qi} = \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}}\right.$$
$$\left.\pm i\cdot\sqrt{-\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}}\right],$$

wo die Wurzeln rechts alle ihre absoluten (positiven) Werthe vorstellen, und wo von den innern (+ oder —) Zeichen, das (+)

Zeichen gilt, wenn q positiv, das (—) Zeichen dagegen, wenn q negativ ist. —

Dieses letztern Umstands wegen, schreibt man wohl auch das Endresultat für künftigen praktischen Gebrauch, gerne so:

$$\sqrt{p \pm qi} = \sqrt{\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}} \cdot i,$$

in welcher man sich q absolut denkt, und wo man die obern (+ oder —) Zeichen zugleich gelten läßt, oder die untern zugleich, während man nicht vergißt, daß man dem ganzen Ausdruck rechts noch ein (+ oder —) Zeichen vorsetzen kann und muß, wenn man beyde Werthe von $\sqrt{p+qi}$ zugleich ausgedrückt haben will.

Beweis. Denn es sind erstlich x und y reel, und zweytens so gefunden worden, daß die Gleichungen (3. und 4.), also auch die Gleichungen (2.) und (1.) identisch werden, welches letztere in der Aufgabe selbst verlangt war.

§. 330. Lehrsatz.

Aber nicht bloß sind, wenn p und q reel, die beyden Werthe der Quadratwurzel aus $p+qi$ allemal auf dieselbe Form zu bringen, sondern auch die 3 Werthe von $\sqrt[3]{p+qi}$, und die 4 Werthe von $\sqrt[4]{p+qi}$ werden allemal dieselbe Form $x+yi$ annehmen können, wo x und y von p und von q abhängige, aber reele Ausdrücke sind.

Beweis I. Setzt man x und y reel und so voraus, daß

$$1)\ \sqrt[3]{p+qi} = x+yi \quad \text{wird,}$$

so muß

$$2)\ p+qi = (x+yi)^3$$
$$= (x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)\cdot i$$

d. h. nach (§. 325.)

$$3)\ p = x^3-3xy^2$$

und

$$4)\ q = 3x^2y-y^3 = (3x^2-y^2)y$$

seyn. Umgekehrt, kann man reele Werthe für x und y finden, welche die Gleichungen (3.) und (4.) zugleich identisch machen, so machen dieselben auch die (1.) identisch, und der erste Theil des Lehrsatzes ist dann erwiesen.

Eliminirt man aber aus (3.) und (4.) zuerst y^2 durch die Substitutionsmethode, indem man aus (3.):

$$y^2 = \frac{x^3 - p}{3x}$$

findet und den Werth dafür in (4.) substituirt, so findet sich

$$q = \left(3x^2 - \frac{x^3 - p}{3x}\right) y,$$

woraus 5) $y = \frac{3qx}{8x^3 + p}$ sich ergibt.

Wird nun dieser Werth von y in (3.) substituirt, um y gänzlich zu eliminiren, so erhält man

6) $(x^3)^3 + \frac{3}{4}p(x^3)^2 - (\frac{15}{64}p^2 + \frac{27}{64}q^2)(x^3) - \frac{1}{64}p^3 = 0,$

welche Gleichung nach x^3 kubisch ist, mit reelen Koeffizienten, also nach (§. 286.) wenigstens einen reelen Werth α für x^3 liefert, so daß man

7) $x^3 = \alpha$ oder $x^3 - \alpha = 0$

wiederum mit reelen Koeffizienten hat, also für x selbst, ebenfalls nach (§. 286.), wenigstens einen reelen Werth x_1 findet. Und zu diesem reelen Werth x_1 findet sich aus (5.) der zugehörige Werth y_1 von y, ebenfalls reel, nämlich $y_1 = \frac{3qx_1}{8x_1^3 + p}$; weil gerade dieser Werth von y genommen werden muß, wenn (3.) und (4.) zugleich identisch werden sollen.

Es existirt also x_1 und y_1 reel und so, daß

$$\sqrt[3]{p + qi} = x_1 + y_1 \cdot i \quad \text{ist.}$$

Ist aber $x_1 + y_1 \cdot i$ einer der 3 Werthe der Kubikwurzel $\sqrt[3]{p + qi}$, so finden sich alle 3 Werthe derselben, nach (§. 268.), wenn man den eben gefundenen $x_1 + y_1 \cdot i$, mit den 3 Werthen von $\sqrt[3]{1}$ d. h. mit

$$1, \quad -\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) \cdot i \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{2} - (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}) \cdot i$$

multiplizirt, und da müssen nach (§. 326. Nr. 3.) alle 3 Werthe nothwendig dieselbe Form annehmen, welche der erste schon hat; sie werden nämlich:

der erste $= x_1 + y_1 \cdot i;$

der zweyte $= -(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1\sqrt{3}) + (\frac{1}{2}x_1\sqrt{3} - \frac{1}{2}y_1) \cdot i;$

und der dritte $= -(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1\sqrt{3}) + (-\frac{1}{2}x_1\sqrt{3} - \frac{1}{2}y_1) \cdot i$ seyn, wo $\sqrt{3}$ durchaus uud so oft sie vorkommt, ihren absoluten Werth bedeuten mag. *)

---

*) Wären p und q in Ziffern wirklich gegeben, und wollte man,

Beweis II. Weil nach (§. 136.) $\sqrt[4]{p+qi} = \sqrt{\sqrt{p+qi}}$; und weil dabey die beyden Werthe von $\sqrt{p+qi}$ bereits die Form $\pm P \pm Qi$ erhalten haben, so ist $\sqrt[4]{p+qi} = \sqrt{\pm P \pm Qi}$ offenbar von derselben Form, und alle 4 Werthe von $\sqrt[4]{p+qi}$ sind demnach mittelst des (§. 328.) leicht auszumitteln.

Und ist $x_1 + y_1 \cdot i$ einer der 4 Werthe von $\sqrt[4]{p+qi}$, so erhält man alle 4, wenn man solchen nach und nach mit den 4 Werthen von $\sqrt[4]{1}$ multiplizirt, d. h. mit

$$+1, \quad -1, \quad +i \quad \text{und} \quad -i;$$

so daß man erhält

$$x_1 + y_1 \cdot i; \qquad -x_1 - y_1 \cdot i;$$
$$-y_1 + x_1 \cdot i; \qquad +y_1 - x_1 \cdot i;$$

als die 4 Werthe von $\sqrt{p+qi}$.

§. 331. Lehrsatz.

Jeder ursprünglich aus ganzen Zahlen (aus wirklichen Zahlen der Zahlenreihe) beliebig durch die 4 ersten Operationen, oder

---

um den reelen Werth α von x^3 aus (6.) zu finden, die Auflösung der (§. §. 272—274.) anwenden, so würde man nach (§. 287.) bald finden, daß hier alle 3 Werthe von (x^3) reel sind, daß daher die Cardan'sche Formel hier allemal in dem irreduktiblen Falle sich befindet, mithin aus ihr die reelen Werthe von x^3 nicht eher wirklich in Ziffern ausgedrückt gefunden werden können, als bis die hier oben in Form unsers Lehrsatzes hingestellte Aufgabe gelöst ist. Das wirkliche Auswerthen in Ziffern, von x_1 und y_1, muß also einem viel spätern Kapitel überlassen bleiben. — Nebenbey kann man aber noch bemerken, daß x aus (6.) 9 Werthe bekommt, nämlich 3 reele Werthe α_1, α_2 und α_3 für x^3, und dann für x, die 9 Werthe $\sqrt[3]{\alpha_1}$, $\sqrt[3]{\alpha_2}$, $\sqrt[3]{\alpha_3}$; von denen dann nach (§. 268.) dreie reel, die übrigen 6 aber imaginär und von der Form $P+Qi$ sind. Zu den imaginären Werthen von x, ergeben sich dann aus (5.) auch imaginäre Werthe für y, und $x+yi$ ist doch jedesmal einer der 3 Werthe von $\sqrt[3]{p+qi}$, so daß sich jeder dieser letztern 6 Werthe in einen der 3 oben gefundenen immer wird umformen lassen.

auch durch die 3 letztern (Potenziren, Radiziren und Logarithmiren) zusammengesetzte Ausdruck, wenn nur keine andern Potenzen, Wurzeln und Logarithmen genommen werden, als solche die in irgend einem der vorhergehenden Paragraphen ihre Bedeutung bekommen haben; ferner alle Werthe des Unbekannten x, wie solche durch eine (bisher aufgelöste) Gleichung der 4 ersten Grade gegeben seyn mögen, während die Koeffizenten dieser Gleichungen selbst wieder beliebig durch bisher betrachtete Zusammensetzungen aus wirklichen Zahlen oder durch Auflösungen ähnlicher Gleichungen mit ähnlichen Koeffizientn entstanden gedacht werden; — also jeder bis jetzt aus ursprünglich ganzen Zahlen möglicherweise gebildet oder als durch bestimmte Zusammensetzung gegeben gedachte Ausdruck, — ist entweder reel oder imaginär, aber in jedem Falle auf die Form

$$P+Q\cdot i$$

zu bringen, wo P und Q für jeden einzelnen Fall zu findende reele Ausdrücke sind (d. h. positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen oder auch Null).

Beweis. Alle möglichen Zusammensetzungen der 4 erstern Operationen aus ursprünglich ganzen Zahlen geben nach (§. §. 109—111.) allemal eine reele Zahl, und jede reele Zahl z ist unter der Form

$$P+Qi$$

enthalten, wenn man unter Q den reelen Werth Null sich denkt und unter P den reelen Werth z selbst.

Die Werthe des Unbekannten x aus den Gleichungen

$$ax+b = 0,$$
$$ax^2+bx+c = 0,$$
$$ax^3+bx^2+cx+d = 0,$$
$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e = 0,$$

mit reelen Koeffizienten, also auch alle Werthe von x aus den Gleichungen

$$x^2-a = 0,$$
$$x^3-a = 0,$$
$$x^4-a = 0,$$

wo a reel ist, d. h. also alle Werthe der allgemeinen Wurzeln

$$\sqrt{a},\quad \sqrt[3]{a} \text{ und } \sqrt[4]{a},$$

wenn a reel ist, haben nach (§. §. 243. 288. und 299.) ebenfalls nothwen-

wendig die Form

$$P+Qi$$

wenn sie imaginär sind, während dieselbe Form für sie beybehalten werden kann, wenn sie reel und $= z$ sind, in so ferne man dann nur unter Q den reelen Werth Null und unter P diesen reelen Werth z vorgestellt denken darf.

Werden ferner Ausdrücke von der Form $P+Qi$, wo P und Q beliebig reele Zahlen vorstellen, auf's neue mit einander durch die 4 erstern Operationen verbunden, oder zur ganzen, oder zur Differenz-Potenz erhoben, oder endlich, wird

$$\sqrt{P+Qi} \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{P+Qi} \quad \text{oder} \quad \sqrt[4]{P+Qi}$$

gesucht, so erhält man doch immer wieder Ausdrücke von derselben Form, nach (§. §. 327—330.).

Also bleibt nur noch übrig zu untersuchen, ob die Werthe von x us den Gleichungen

$$\begin{aligned} ax+b &= 0, \\ ax^2+bx+c &= 0, \\ ax^3+bx^2+cx+d &= 0, \\ ax^4+bx^3+cx^2+dx+e &= 0, \end{aligned}$$

auch dann noch auf dieselbe Form $P+Qi$ gebracht werden können, wenn die Koeffizienten a, b, c, d, e nicht alle reel, sondern solche, bis jetzt erhaltene allgemeinste der speziellen Zahlformen, nämlich solche Ausdrücke von der Form $P+Qi$ sind, also entweder alle imaginär, oder zum Theil doch imaginär, zum Theil reel.

Betrachtet man aber die allgemeinen Auflösungen der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen (§. §. 242. 272—274. 297. und 298.), so ergibt sich augenblicklich, daß man, um jetzt die Werthe von x zu finden, bloß Ausdrücke von der Form $P+Qi$, zu addiren, subtrahiren, multipliziren oder zu dividiren, oder endlich aus solchen Ausdrücken die allgemeine Quadrat- oder Kubik-Wurzel zu nehmen hat, welche, wie wir wissen, allemal Ausdrücke von derselben Form geben.

Also ist unser Lehrsatz ganz und vollständig erwiesen.

§. 332. Zusatz.

Nennen wir jeden Ausdruck von der Form $P+Qi$, wo P und Q beliebige reele Zahlen sind, der also eben so gut reel als auch imaginär seyn kann, eine allgemein-numerische Zahl, so

enthält die allgemein-numerische Zahl alle bis jetzt möglichen speziellen Zahlformen, sie mögen direkt durch gegebene Zusammensetzungen, oder als Unbekannte aus Gleichungen der 4 ersten Grade zu finden seyn.

Und wenn in der Folge neue Erweiterungen der Begriffe der Potenzen, der Wurzeln und der Logarithmen möglich und nöthig werden sollten, so hat man nur zu zeigen, daß man nie mit dieser allgemein-numerischen Zahl P+Qi in Widerspruch gerathen könne, um überzeugt zu seyn, daß man gegen nichts, früher als wahr erkanntes, anstoßen könne, daß also dieses Erweitern der Begriffe selbst erlaubt sey und nie zu unrichtigen Resultaten führen werde; mithin bloß zu richtigen Resultaten führen müsse.

Berlin, gedruckt bey den Gebr. Unger.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Ohm, Martin,

Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik

Bd.: 1

Berlin 1828

Math.u. 144 k-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594164-4